Say "No" to Pass Books

RCSCE राजस्थान स्कूल शिक्षा परिषद्
स्कूल शिक्षा विभाग, राजस्थान सरकार
सत्यमेव जयते

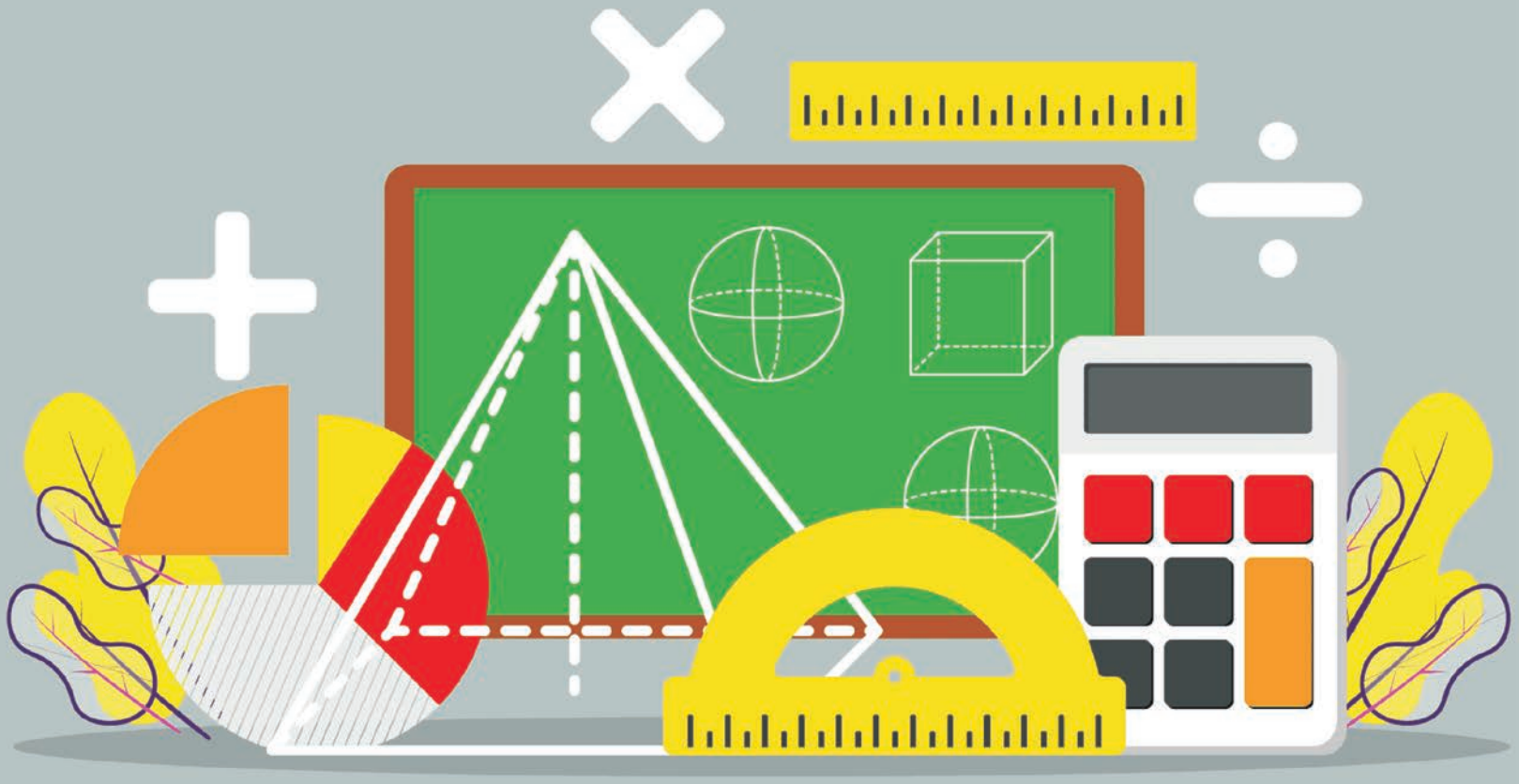
पाठ्य पुस्तकों के अध्ययन के आधार पर

प्रश्न बैंक

Question Bank

कक्षा – 12

गणित



राजस्थान स्कूल शिक्षा परिषद्, जयपुर (राजस्थान)

संरक्षक

श्रीमान मदन दिलावर

कैबिनेट मंत्री, स्कूल शिक्षा, संस्कृत शिक्षा एवं पंचायती राज (राजस्थान सरकार)

संरक्षक

श्री नवीन जैन (आईएएस)

सचिव, स्कूल शिक्षा, भाषा एवं पुस्तकालय विभाग, राजस्थान सरकार, जयपुर

अविचल चतुर्वेदी (आईएएस)

राज्य परियोजना निदेशक एवं आयुक्त

राजस्थान स्कूल शिक्षा परिषद् जयपुर

श्री आशीष मोदी (आईएएस)

निदेशक, माध्यमिक शिक्षा

बीकानेर, राजस्थान

मुख्य मार्गदर्शक

डॉ. अनिल कुमार पालीवाल

अतिरिक्त राज्य परियोजना निदेशक

राजस्थान स्कूल शिक्षा परिषद् जयपुर

ज्योति ककवानी

अतिरिक्त राज्य परियोजना निदेशक

राजस्थान स्कूल शिक्षा परिषद् जयपुर

संयोजक एवं मार्गदर्शक

श्रीमती उर्मिला चौधरी

उपनिदेशक, गुणवत्ता एवं प्रशिक्षण

राजस्थान स्कूल शिक्षा परिषद् जयपुर

सहयोगकर्ता

रमेश चंद मान

सहायक निदेशक, राजस्थान स्कूल शिक्षा परिषद् जयपुर

लेखन

अंकिता कुमारी

व्याख्याता, रा.उ.मा.वि. चौमूं, जयपुर (राज.)

अनुक्रमणिका

क्र.सं.	अध्याय	अंक भार
1.	सम्बन्ध एवं फलन	03
2.	प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन	04
3.	आव्यूह	05
4.	सारणिक	05
5.	सांतव्य तथा अवकलनीयता	08
6.	अवकलज के अनुप्रयोग	06
7.	समाकलन	12
8.	समाकलनों के अनुप्रयोग	04
9.	अवकल समीकरण	06
10.	सदिश	07
11.	त्रिविमीय ज्यामिति	09
12.	रैखिक प्रोग्रामन	04
13.	प्रायिकता	07

खण्ड–अ

अध्याय–1

सम्बन्ध और फलन

(Relation and Function)

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

प्र. 1 मान लीजिए कि $F : R \to R, F(x) = x^4$ द्वारा परिभाषित है तो फलन –

(अ) F एकैकी आच्छादक है (ब) F बहुएक आच्छादक है

(स) F एकैकी है परन्तु आच्छादक नहीं (द) F न तो एकैकी है और न आच्छादक है ( )

प्र. 2 यदि $F : R \to R, f(x) = \sin x$ तथा $F : R \to R, g(x) = x^2$ तो $fog(x)$ है

(अ) $\sin x^2$ (ब) $\sin x$ (स) $\sin^2 x^2$ (द) $\sin^2 x$ ( )

प्र. 3 यदि $f(x) = \frac{x}{1-x} = \frac{1}{y}$, तो $f(y)$ का मान होगा –

(अ) x (ब) $x - 1$ (स) $x + 1$ (द) $\frac{1-x}{2x-1}$ ( )

प्र. 4 यदि समुच्चय N में $R = \{(a,b) : a = b - 2, b > 6\}$ द्वारा प्रदत्त संबंध R है तो निम्न में से कौनसा सत्य है?

(अ) $(2, 4) \in R$ (ब) $(3, 8) \in R$ (स) $(6, 8) \in R$ (द) $(8, 7) \in R$ ( )

प्र. 5 समुच्चय $\{1, 2, 3, 4\}$ में संबंध निम्न प्रकार परिभाषित है – $R = \{(1, 2), (2, 2), (1, 1), (4, 4), (3, 3), (1, 3), (3, 2)\}$ यह सम्बन्ध R

(अ) स्वतुल्य तथा सममित है किन्तु संक्रामक नहीं

(ब) स्वतुल्य तथा संक्रामक है किन्तु सममित नहीं

(स) सममित तथा संक्रामक है किन्तु स्वतुल्य नहीं

(द) एक तुल्यता संबंध है ( )

प्र. 6 मान लीजिए कि $F : R \to R, F(x) = (x)^3$ द्वारा परिभाषित हैतो सही विकल्प का चयन कीजिए –

(अ) F एकैकी आच्छादक (ब) F बहुएकी आच्छादक

(स) F एकैकी है पर आच्छादक नहीं (द) F न तो एकैकी है और ना ही आच्छादक है ( )

RCSCE राजस्थान स्कूल शिक्षा परिषद
स्कूल शिक्षा विभाग, राजस्थान सरकार

प्र. 7 यदि $A = \{1, 2, 3\}$ हो तो अवयव (1, 2) वाले तुल्यता संबंधों की संख्या है –

(अ) 1 (ब) 2 (स) 8 (द) 4 ( )

प्र. 8 निम्नलिखित में से कौनसा पूर्णांकों के समुच्चय z में तुल्यता संबंध नहीं हैं।

(अ) $aRb \Leftrightarrow a + b$ एक सम पूर्णांक है। (ब) $aRb \Leftrightarrow a - b$ सम पूर्णांक है।

(स) $aRb \Leftrightarrow a < b$ (द) $aRb \Leftrightarrow a = b$ ( )

प्र. 9 R से R में परिभाषित निम्न फलनों में आच्छादक कौनसा है –

(अ) $f(x) = \sin x$ (ब) $f(x) = |x|$ (स) $f(x) = x^3$ (द) $f(x) = e^{-x}$ ( )

प्र. 10 माना $x = \{x^2, x \in N\}$ तथा फलन $f : N \to x$ इस प्रकार परिभाषित है कि $f(x) = x^2, x \in N$ तब फलन है–

(अ) केवल एकैकी (ब) एकैकी आच्छादक नहीं

(स) केवल आच्छादक (द) एकैकी आच्छादक ( )

रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए –

1. यदि $f(x) = 27x^3$ तथा $g(x) = x^{1/3}$ हो तो $gof(x)$ ..... है।

2. फलन $f : z \to z, f(x) = 2x + 1$ एकैकी व ..... है।

3. समुच्चय $A = \{a, b, c\}$ से समुच्चय $B = \{x, y, z, t\}$ में परिभाषित कुल एकैकी फलनों की संख्या .... है।

एक शब्द में उत्तर दीजिए –

प्र. 1 $f(x) = 2x$ द्वारा प्रदत्त फलन $f : N \to N$, दर्शाइए कि $f(x)$ आच्छादक नहीं है।

प्र. 2 $f : R \to R, f(x) = \sin x$ तथा $g : R \to R, g(x) = x^2$ तो $gof(x)$ ज्ञात कीजिए।

अध्याय–2

प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन

(Inverse Tignometric Function)

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

प्र. 1 $2\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ का मान है –

(अ) $\frac{\pi}{2}$ (ब) $\frac{2\pi}{3}$ (स) $\frac{3\pi}{2}$ (द) $\frac{5\pi}{6}$ ( )

प्र. 2 $\tan^{-1}\sqrt{3}-\cot^{-1}(-\sqrt{3})$ का मान ज्ञात कीजिए –

(अ) π (ब) $\frac{-\pi}{2}$ (स) 0 (द) $2\sqrt{3}$ ( )

प्र. 3 $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\sin^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)\right)$ का मान –

(अ) $\frac{1}{2}$ (ब) $\frac{1}{3}$ (स) $\frac{1}{4}$ (द) 1 ( )

प्र. 4 $\tan^{-1}\sqrt{3}-\sec^{-1}(-2)$ का मान –

(अ) π (ब) $\frac{-\pi}{3}$ (स) $\frac{\pi}{3}$ (द) $\frac{2\pi}{3}$ ( )

प्र. 5 $\cot(\tan^{-1}\alpha+\cot^{-1}\alpha)$ का मान

(अ) 1 (ब) ∞ (स) 0 (द) इनमें से कोई नहीं ( )

प्र. 6 $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+2\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ का मान है –

(अ) $\frac{\pi}{2}$ (ब) $\frac{2\pi}{3}$ (स) $\frac{3\pi}{2}$ (द) π ( )

प्र. 7 यदि $\sin^{-1}x=y$ तो –

(अ) $0\le y\le\pi$ (ब) $\frac{-\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$ (स) $0<y<\pi$ (द) $\frac{-\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$ ( )

प्र. 8 $\cos^{-1}\left(\cos\frac{7\pi}{6}\right)$ का मान बराबर है –

(अ) $\frac{7\pi}{6}$ (ब) $\frac{5\pi}{6}$ (स) $\frac{\pi}{3}$ (द) $\frac{\pi}{6}$ ( )

RCSCE राजस्थान स्कूल शिक्षा परिषद
स्कूल शिक्षा विभाग, राजस्थान सरकार

प्र. 9 यदि $4 \sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \pi$ तो x का मान है –

(अ) $\frac{1}{2}$ (ब) $\frac{1}{3}$ (स) $\frac{1}{4}$ (द) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ( )

प्र. 10 $\text{cosec}^{-1} x$ परिसर है –

(अ) $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (ब) $[0, \pi]$

(स) $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \{0\}$ (द) $[0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ ( )

एक शब्द में उत्तर दीजिए –

1. $\text{Sin}\left[tan^{-1}(1) + cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]$ का मान ज्ञात कीजिए।

2. $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ का मुख्य मान है।

3. $3 \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए।

4. $\sin^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)$ का मुख्य मान ज्ञात कीजिए।

5. $\sec^{-1}(-2) - \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए।

अध्याय–3

आव्यूह

(Matrices)

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

प्र. 1 $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ एक वर्ग आव्यूह है यदि –

(अ) $m < n$ (ब) $m > n$ (स) $m = n$ (द) इनमें से कोई नहीं ( )

प्र. 2 यदि A एक 3 x 3 कोटि का वर्ग आव्यूह है तो $|KA|$ का मान होगा।

(अ) $K|A|$ (ब) $K^2|A|$ (स) $K^3|A|$ (द) $3K|A|$ ( )

प्र. 3 यदि आव्यूह $A = (a_{ij})_{2x4}$ हो तो A में अवयवों की संख्या होगी –

(अ) 6 (ब) 8 (स) 2 (द) इनमें से कोई नहीं ( )

प्र. 4 समीकरण $\begin{bmatrix} x+y+z \\ x+z \\ y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$ में x का मान है –

(अ) 3 (ब) 4 (स) 5 (द) 2 ( )

प्र. 5 यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ दो आव्यूह हैं, तो AB होगा –

(अ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ब) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(स) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (द) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ( )

प्र. 6 यदि किसी आव्यूह की कोटि m x n हैं, तो इसमें अवयवों की संख्या है –

(अ) m (ब) n (स) mm (द) $m - n$ ( )

प्र. 7 यदि $\begin{bmatrix} K+4 & -1 \\ 3 & K-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ तो a का मान ज्ञात कीजिए –

(अ) 2 (ब) 6 (स) 4 (द) 8 ( )

प्र. 8 यदि A तथा B समान कोटि के सममित आव्यूह है तो $AB - BA$ एक –

(अ) विषम सममित आव्यूह (ब) सममित आव्यूह है

(स) शून्य आव्यूह है (द) तत्समक आव्यूह है ( )

प्र. 9 यदि $A = \begin{bmatrix} \cos \propto & -\sin \propto \\ \sin \propto & \cos \propto \end{bmatrix}$ तो $A + A^1 = I$, यदि α का मान है

(अ) $\frac{\pi}{6}$ (ब) $\frac{\pi}{3}$ (स) π (द) $\frac{3\pi}{2}$ ( )

प्र. 10 यदि आव्यूह A और B के क्रम संख्या क्रमशः m x n तथा n x p है तो AB का क्रम है –

(अ) p x m (ब) n x m (स) m x p (द) n x p ( )

रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए –

1. यदि $x \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$ हो तो $(x + y)$ ..... होगा।

2. यदि $A \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, तो $A - B =$ ..... है।

3. यदि $a_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ तो उस मैट्रिक्स को ..... कहते है।

एक शब्द में उत्तर दीजिए –

1. यदि $\begin{bmatrix} a+b & 4 \\ -3 & ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$ हो तो a व b के मान ज्ञात कीजिए।

2. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ तो $2A^2 - 3B$ ज्ञात करें।

अध्याय–4

सारणिक

(Determinants)

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

प्र. 1 यदि $\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & x \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$, तो का मान है –

(अ) 2 (ब) 3 (स) –3 (द) –2 ( )

प्र. 2 यदि A, 3 x 3 कोटि का वर्ग आव्यूह है तो | adjA | का मान है –

(अ) | A | (ब) $|A|^2$ (स) $|A|^3$ (द) 3 | A | ( )

प्र. 3 किसी सारणिक की दो पंक्तियों को परस्पर बदलने पर –

(अ) उसका मान अपरिवर्तित रहता है। (ब) उसके मान का केवल चिह्न बदलता है।

(स) उसका मान चिह्न सहित बदल जाता है। (द) इनमें से कोई नहीं ( )

प्र. 4 यदि w इकाई का घनमूल हो, तो $\begin{vmatrix} 1 & w & w^2 \\ w & w^2 & 1 \\ w^2 & 1 & w \end{vmatrix}$ का मान है –

(अ) 1 (ब) 0 (स) w (द) w^2 ( )

प्र. 5 यदि सारणिक $\begin{vmatrix} K & 8 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4$ हो तो K का मान होगा ?

(अ) 4 (ब) 5 (स) 6 (द) इनमें से कोई नहीं ( )

प्र. 6 आव्यूह A अव्युक्रमणीय आव्यूह कहलाता है यदि –

(अ) | A | = 0 (ब) | A | = 1 (स) | A | = a –1 (द) इनमें से कोई नहीं ( )

प्र. 7 यदि $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 18 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 18 & 6 \end{vmatrix}$ तो x बराबर है –

(अ) 6 (ब) ± 6 (स) –6 (द) 0 ( )

प्र. 8 एक तृतीय कोटि के सारणिक Δ के प्रत्येक अपयव को 4 से गुणा कर दें, तो सारणिक का मान होगा –

(अ) 4 Δ (ब) 16 Δ (स) 12 Δ (द) 64 Δ ( )

प्र. 9 समीकरण $\begin{vmatrix} 2-x & -3 & 3 \\ 3 & 4-x & 5 \\ 3 & 5 & 4-x \end{vmatrix} = 0$ का एक मूल होगा –

(अ) –2 (ब) 1 (स) –1 (द) 0 ( )

RCSCE राजस्थान स्कूल शिक्षा परिषद
स्कूल शिक्षा विभाग, राजस्थान सरकार

प्र. 10 यदि A कोटि दो का व्युक्रमणीय आव्यूह है तो $\det(A^{-1})$ बराबर है –

(अ) $\det(A)$ (ब) $\frac{1}{\det(A)}$ (स) 1 (द) 0 ( )

एक शब्द में उत्तर दीजिए –

1. व्युक्रमणीय तथा अव्युक्रमणीय आव्यूह को परिभाषित कीजिए।

2. यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ हो तो A^{-1} ज्ञात कीजिए।

3. यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ हो, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए।

4. x के किस मान के लिए सारणिक $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & x \end{bmatrix}$ का मान शून्य होगा ?

5. सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 8 & 6 & 3 \\ 9 & 5 & 4 \end{vmatrix}$ में अवयव 6 का उपसारणिक ज्ञात कीजिए।

RCSCE राजस्थान स्कूल शिक्षा परिषद
स्कूल शिक्षा विभाग, राजस्थान सरकार

अध्याय–5

सांतव्य एवं अवकलनीयता

(Continutiy and Different Ibilitty)

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

प्र. 1 यदि $3x + 2y = \sin x$, तो $\frac{dy}{dx}$ है –

(अ) $\frac{\cos x+3}{2}$ (ब) $\frac{\cos x-2}{3}$ (स) $\frac{\cos x-3}{2}$ (द) $\frac{\cos x+2}{3}$ ( )

प्र. 2 यदि $x - y = \pi$ तो $\frac{dy}{dx}$ का मान होगा –

(अ) 0 (ब) 1 (स) –1 (द) 2 ( )

प्र. 3 फलन का $y = \cos\left(\sqrt{x}\right)$ के x सापेक्ष अवकलन होगा –

(अ) $\frac{sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ (ब) $\frac{-sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ (स) $-2\sqrt{x}\,sin\sqrt{x}$ (द) $2\sqrt{x}\,sin\sqrt{x}$ ( )

प्र. 4 फलन $\cos(\sin x)$ का अवकलज है –

(अ) $\sin(\sin x)$ (ब) $\sin(\cos x)$ (स) $-\sin(\sin x)$ (द) $-\cos x \sin(\sin x)$ ( )

प्र. 5 K के किस मान के लिए निम्न फलन $x = 1$ पर सतत् है –

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x-1} & , \quad x \neq 1 \\ k & , \quad x = 1 \end{cases}$$

(अ) 1 (ब) –1 (स) 0 (द) 3 ( )

प्र. 6 यदि $x^y = e^{x-y}$ है तो $\frac{dy}{dx}$

(अ) $\frac{\log x}{(1+\log x)^2}$ (ब) $\frac{\log x}{1+\log x}$ (स) $\frac{\log x}{(1+\log x)^2}$ (द) इनमें से कोई नहीं ( )

प्र. 7 $f(x) = |x-1| + |x-3|$ का $x = 2$ पर अवकलन का मान है –

(अ) –2 (ब) 0 (स) 2 (द) परिभाषित नहीं ( )

प्र. 8 यदि $y = x \cdot \log_{e^x}$ तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान होगा –

(अ) $\frac{1}{1+x}$ (ब) $\frac{1}{x}$ (स) $\log(1+x)$ (द) $1 + \log x$ ( )

RCSCE राजस्थान स्कूल शिक्षा परिषद
स्कूल शिक्षा विभाग, राजस्थान सरकार

एक शब्द में उत्तर दीजिए –

1. यदि $3x + 2y = \cos y$, तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए।

2. दर्शाइए कि फलन $f(x) = x^2, x = 0$ पर संतत है।

3. $\sec x$ का $\tan x$ के सापेक्ष अवकलज ज्ञात कीजिए।

4. यदि फलन $f(x) = \frac{x^2 - a^2}{x + a}$, $x = a$ पर संतत हो तो $f(a)$ का मान ज्ञात कीजिए।

5. $x = 3$ पर फलन $f(x) = 2x^2 - 1$ के सांतत्य की जाँच कीजिए।

6. यदि $y = \log_{a^x}$ तो $\frac{dy}{dx}$ होगा ?

7. यदि $f(x) = -|x + 1| + 3$ तो $f(x)$ का अधिकतम मान क्या होगा ?

RCSCE राजस्थान स्कूल शिक्षा परिषद
स्कूल शिक्षा विभाग, राजस्थान सरकार

अध्याय–6

अवकलज के अनुप्रयोग

(Applications of Derivative)

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

प्र. 1 निम्नलिखित में से किस अन्तराल में $y = x^2e^{-x}$ वर्धमान है –

(अ) (–∞, ∞) (ब) (–2, 0) (स) (2, ∞) (द) (0, 2) ( )

प्र. 2 निम्नलिखित अन्तरालों में से किस अन्तराल में $f(x) = x^{100} + \sin x - 1$ द्वारा प्रदत्त f ह्रासमान है ?

(अ) (0, 1) (ब) (π / 2, π) (स) (0, π / 2) (द) इनमें से कोई नहीं ( )

प्र. 3 R में दिया गया फलन $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 100$ है –

(अ) ह्रासमान (ब) वर्धमान (स) दोनों (द) इनमें से कोई नहीं ( )

प्र. 4 एक कण का गति समी. $s = t^2 - 4t + 5$ है, इसकी चाल के शून्य होने का समय है –

(अ) 1 सैकण्ड (ब) 2 सैकण्ड (स) 3 सैकण्ड (द) 4 सैकण्ड ( )

प्र. 5 निम्नलिखित में कौनसे फलन (0, π / 2) में ह्रासमान है ?

(अ) $\cos x$ (ब) $\cos 2x$ (स) $\cos 3x$ (द) $\tan x$ ( )

एक शब्द में उत्तर दीजिए –

1. सिद्ध कीजिए कि अन्तराल (–1, 1) में फलन $f(x) = x^2 - x + 1$ न तो वर्धमान है और न ही ह्रासमान है।

2. एक 10 m त्रिज्या के बेलनाकार टंकी में 314 m^3/H की दर से गेहूँ भरा जाता है, भरे गए गेहूँ की गहराई की वृद्धि दर ज्ञात कीजिए ?

3. किसी उत्पाद की x इकाइयों के विक्रय से प्राप्त कुल आय $R(x)$ रुपयों में $R(x) = 13x^2 + 26x + 15$ से प्रदत्त है। सीमांत आय ज्ञात कीजिए, जब $x = 7$ है।

4. अंतराल ज्ञात कीजिए जिसमें $f(x) = x^2 - 4x + 6$ से प्रदत्त फलन f वर्धमान है।

अध्याय–7

समाकलन

(Integrevs)

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

प्र. 1 फलन $\frac{x}{e^{x^2}}$ का x के सापेक्ष समाकलन है –

(अ) $\frac{1}{2e^{x^2}} + c$ (ब) $\frac{2}{e^{x^2}} + c$ (स) $\frac{-2}{e^{x^2}} + c$ (द) $\frac{-1}{2e^{x^2}} + c$ ( )

प्र. 2 $cos^2 \int x\, dx$ का मान है –

(अ) $\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + c$ (ब) $x^2 + \frac{1}{4} \sin 2x + c$

(स) $\frac{x}{4} + \frac{1}{2} \sin x + c$ (द) $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{4} \sin^2 x + c$ ( )

प्र. 3 $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$ बराबर है –

(अ) $\frac{1}{3}x^{1/3} + 2x^{1/2} + c$ (ब) $\frac{2}{3}x^{2/3} + \frac{1}{2}x^2 + c$

(स) $\frac{2}{3}x^{3/2} + 2x^{1/2} + c$ (द) $\frac{3}{2}x^{3/2} + \frac{1}{2}x^{1/2} + c$ ( )

प्र. 4 $\int \log x\, dx$ बराबर हैं –

(अ) $x \log (xe) + c$ (ब) $x \log x + c$

(स) $x \log \left(\frac{x}{e}\right) + c$ (द) $\log \left(\frac{x}{e}\right) + c$ ( )

प्र. 5 यदि $\frac{d}{dx}$ f(x) = $4x^3 - \frac{3}{x^4}$ तथा f(2) = 0, तब f(x) है

(अ) $x^4 + \frac{1}{x^3} - \frac{129}{8}$ (ब) $x^3 + \frac{1}{x^4} + \frac{129}{8}$

(स) $x^4 + \frac{1}{x^3} + \frac{129}{8}$ (द) $x^3 + \frac{1}{x^4} - \frac{129}{8}$ ( )

प्र. 6 $\int \sqrt{1 + cos2x}\, dx$ का मान है –

(अ) $\sqrt{2} \sin x + c$ (ब) $\sqrt{2} \cos x + c$

(स) $\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + c$ (द) $\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + c$ ( )

प्र. 7 $\int \frac{dx}{sin^2x\, cos^2x}$ बराबर है –

(अ) $\tan x + \cot x + c$ (ब) $\tan x - \cot x + c$

(स) $\tan x \cot x + c$ (द) $\tan x - \cot 2x + c$ ( )

प्र. 8 $\int \frac{e^x(1+x)}{cos^2(e^x x)}\, dx$ बराबर है –

(अ) $-\cot(x^x e) + c$ (ब) $\tan(xe^x) + c$

(स) $\tan(e^x) + c$ (द) $\cot(e^x) + c$ ( )

प्र. 9 $\int_0^a f(x)\, dx$ बराबर है –

(अ) $\int_0^a f(a+x)\, dx$ (ब) $\int_0^a f(2a+x)\, dx$

(स) $\int_0^a f(x-a)\, dx$ (द) इनमें से कोई नहीं ( )

प्र. 10 $\int_1^2 \frac{|x|}{x}\, dx$ बराबर है –

(अ) 0 (ब) 1 (स) 2 (द) 3 ( )

अध्याय–8

समाकलनों के अनुप्रयोग

(Application of Integrals)

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

प्र. 1 प्रथम चतुर्थांश में वृत्त $x^2 + y^2 = 4$ एवं रेखाओं $x = 0, x = 2$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है –

(अ) π (ब) $\frac{\pi}{2}$ (स) $\frac{\pi}{3}$ (द) $\frac{\pi}{4}$ ( )

प्र. 2 वक्र $y^2 = 4x$, y– अक्ष एवं रेखा $y = 3$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है –

(अ) 2 (ब) $\frac{9}{4}$ (स) $\frac{9}{3}$ (द) $\frac{9}{2}$ ( )

प्र. 3 वक्र $y = x^3$, x– अक्ष एवं कोटियों $x = -2, x = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है –

(अ) –9 (ब) $\frac{-15}{4}$ (स) $\frac{15}{4}$ (द) $\frac{17}{4}$ ( )

प्र. 4 वृत्त का क्षेत्रफल है – $x^2 + y^2 = a^2$

(अ) πr^2 इकाई (ब) $2\pi a$ इकाई (स) πa^2 वर्ग इकाई (द) $2\pi r$ वर्ग इकाई ( )

प्र. 5 दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए –

(अ) πa^2 वर्ग इकाई (ब) πab वर्ग इकाई (स) 12π वर्ग इकाई (द) 6π वर्ग इकाई ( )

प्र. 6 वृत्त $x^2 + y^2 - 4x = 0$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल है –

(अ) 3π वर्ग इकाई (ब) 4π वर्ग इकाई (स) 6π वर्ग इकाई (द) 9π वर्ग इकाई ( )

प्र. 7 वक्र $x^2 = 4ay$, x– अक्ष तथा कोटि $x = 2$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल है –

(अ) $\frac{3a}{2}$ वर्ग इकाई (ब) $\frac{2}{3a}$ वर्ग इकाई (स) 2π वर्ग इकाई (द) 6π वर्ग इकाई ( )

प्र. 8 वक्र $y = \sin x$, x– अक्ष और $x = 0$ तथा $x = \frac{\pi}{2}$ कोटियों के बीच का क्षेत्रफल है –

(अ) 2 वर्ग इकाई (ब) 3 वर्ग इकाई (स) 1 वर्ग इकाई (द) 4 वर्ग इकाई ( )

प्र. 9 वक्र $y = x|x|$, x – अक्ष एवं कोटियों $x = -1$ तथा $x = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है –

(अ) 0 (ब) $\frac{1}{3}$ (स) $\frac{2}{3}$ (द) $\frac{4}{3}$ ( )

प्र. 10 $y = |x + 3|$ का ग्राफ खींचिए एवं $\int_{-6}^{0} |x + 3|\, dx$ का मान है –

(अ) 6 वर्ग इकाई (ब) 9 वर्ग इकाई (स) 5 वर्ग इकाई (द) 4 वर्ग इकाई ( )

RCSCE राजस्थान स्कूल शिक्षा परिषद
स्कूल शिक्षा विभाग, राजस्थान सरकार

अध्याय–9

अवकल समीकरण

(Differential Equations)

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

प्र. 1 अवकल समीकरण $xy\frac{d^2y}{dx^2}+x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3-y\frac{dy}{dx}=0$ की घात है –

(अ) 3 (ब) 1 (स) 0 (द) 2 ( )

प्र. 2 अवकल समीकरण $2x^2\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+y=0$ की कोटि है ?

(अ) 2 (ब) 1 (स) 0 (द) परिभाषित नहीं ( )

प्र. 3 अवकल समीकरण $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2+\left(\frac{dy}{dx}\right)=0$ की कोटि तथा घात क्रमशः होगी ?

(अ) 1, 2 (ब) (2, 2) (स) (2, 1) (द) (1, 1) ( )

प्र. 4 अवकल समीकरण $\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=a\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{1/3}$ की घात है –

(अ) 1 (ब) 2 (स) 3 (द) 4 ( )

प्र. 5 चार कोटि वाले किसी अवकल समीकरण के व्यापक हल में उपस्थित स्वेच्छ अचरों की संख्या है –

(अ) 0 (ब) 2 (स) c (द) 4 ( )

प्र. 6 अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}=e^{x+y}$ का व्यापक हल है –

(अ) $e^x+e^{-y}=c$ (ब) $e^x+e^y=c$ (स) $e^{-x}+e^y=c$ (द) $e^{-x}+e^{-y}=c$ ( )

प्र. 7 $\frac{dy}{dx}=h\left(\frac{x}{y}\right)$ के रूप वाले समघातीय अवकल समीकरण को हल करने के लिए निम्नलिखित में से कौनसा प्रतिस्थापन किया जाता है –

(अ) $y=vx$ (ब) $v=yx$ (स) $x=v^y$ (द) $x=v$ ( )

प्र. 8 अवकल समीकरण $x\frac{dy}{dx}-y=2x^2$ का समाकलन गुणक है –

(अ) e^{-x} (ब) e^{-y} (स) $\frac{1}{x}$ (द) x ( )

RCSCE राजस्थान स्कूल शिक्षा परिषद
स्कूल शिक्षा विभाग, राजस्थान सरकार

प्र. 9 अवकल समीकरण $\frac{yd\,x-xdy}{y}=0$ का व्यापक हल है –

(अ) $xy=c$ (ब) $x=cy^2$ (स) $y=cx$ (द) $y=cx^2$ ( )

प्र. 10 अवकल समीकरण $e^x dy+(ye^x+2x)\,dx=0$ का व्यापक हल है –

(अ) $xe^y+x^2=c^1$ (ब) $xe^y+y^2=c$ (स) $ye^x+x^2=c$ (द) $ye^x+y^2=c$ ( )

एक शब्द में उत्तर दीजिए –

1. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}+\sqrt{\frac{1-y^2}{1+x^2}}=0, x\neq 1$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

2. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}+y=1\ (y\neq 1)$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

3. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}=\frac{1+y^2}{1+x^2}$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

4. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=0$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

5. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{y^2}$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

अध्याय–10

सदिश

(Vector)

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

प्र. 1 सदिश $\frac{1}{\sqrt{3}}\,\hat{l}+\frac{1}{\sqrt{3}}\,\hat{j}+\frac{1}{\sqrt{3}}\,\hat{k}$ का परिमाण है –

(अ) 3 (ब) 1 (स) -1 (द) 2 ( )

प्र. 2 सदिश $\vec{a}=-2\hat{l}+3\hat{j}-\hat{k}$ के अनुदिश मात्रक (इकाई) सदिश है –

(अ) $\frac{2\hat{i}}{\sqrt{14}}-\frac{3\hat{j}}{\sqrt{14}}+\frac{\hat{k}}{\sqrt{14}}$ (ब) $\frac{2\hat{i}}{\sqrt{14}}-\frac{3\hat{j}}{\sqrt{14}}-\frac{\hat{k}}{\sqrt{14}}$

(स) $\frac{2\hat{i}}{\sqrt{14}}+\frac{3\hat{j}}{\sqrt{14}}-\frac{\hat{k}}{\sqrt{14}}$ (द) $\frac{-2\hat{i}}{\sqrt{14}}+\frac{3\hat{j}}{\sqrt{14}}-\frac{\hat{k}}{\sqrt{14}}$ ( )

प्र. 3 $\hat{l}\cdot(\hat{j}\times\hat{k})+\hat{j}\cdot(\hat{l}\times\hat{k})+\hat{k}\cdot(\hat{l}\times\hat{j})$ का मान है –

(अ) 0 (ब) -1 (स) 1 (द) 3 ( )

प्र. 4 यदि दो सदिशों $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के परिमाण क्रमशः $\sqrt{3}$ व 2 हैं और $\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{6}$ हो, तो $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के बीच का कोण है –

(अ) $\frac{\pi}{2}$ (ब) $\frac{\pi}{3}$ (स) $\frac{\pi}{6}$ (द) $\frac{\pi}{4}$ ( )

प्र. 5 यदि सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ इस प्रकार है कि $|\vec{a}|=3$ और $|\vec{b}|=\frac{\sqrt{2}}{3}$ तब $\vec{a}\times\vec{b}$ एक मात्रक सदिश है यदि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण है –

(अ) $\frac{\pi}{6}$ (ब) $\frac{\pi}{4}$ (स) $\frac{\pi}{3}$ (द) $\frac{\pi}{2}$ ( )

प्र. 6 सदिश $\vec{a}=\hat{l}+\hat{j}+\hat{k}$ का परिमाण $|\vec{a}|$ होगा ?

(अ) $\sqrt{3}$ (ब) 3 (स) 1 (द) इनमें से कोई नहीं ( )

प्र. 7 एक आयत के शीर्षो A, B, C और D जिनके स्थिति सदिश क्रमशः $-\hat{l}+\frac{1}{2}\hat{j}+4\hat{k}$, $\hat{l}+\frac{1}{2}\hat{j}+4\hat{k}$, $\hat{l}-\frac{1}{2}\hat{j}+4\hat{k}$ और $-\hat{l}-\frac{1}{2}\hat{j}+4\hat{k}$ हैं, का क्षेत्रफल है –

(अ) $\frac{1}{2}$ (ब) 1 (स) 2 (द) 4 ( )

RCSCE राजस्थान स्कूल शिक्षा परिषद
स्कूल शिक्षा विभाग, राजस्थान सरकार

प्र. 9 यदि शून्येत्तर सदिश $\vec{a}$ का परिमाण 'a' है और λ एक शून्येत्तर अदिश है तो $\lambda\vec{a}$ एक मात्रक सदिश है यदि –

(अ) $\lambda = 1$ (ब) $\lambda = -1$ (स) $a = |\lambda|$ (द) $a = \frac{1}{|\lambda|}$ ( )

प्र. 10 यदि सदिश $2\hat{i} + p\hat{j} + 2\hat{k}$ तथा $4\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$ लम्बवत हो, तो P बराबर है –

(अ) 2 (ब) 3 (स) –5 (द) 6 ( )

रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए –

1. बिन्दुओं A (1, 2, 2) और B (2, 3, 1) को मिलाने वाला एवं $\vec{a}$ से $\vec{b}$ की तरफ दिष्ट सदिश ..... है।

2. सदिश $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ और $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ के बीच का कोण θ = ... हैं।

3. यदि एक रेखा के दिक् अनुपात 2, –1, –2 हो तो इसकी दिक् कोज्याएँ ..... होगी ?

एक शब्द में उत्तर दीजिए –

1. सदिश $\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ का सदिश $\vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ पर प्रक्षेप ज्ञात कीजिए।

2. यदि $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ और $\vec{b} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + \lambda\hat{k}$ इस प्रकार है कि $\vec{a} \parallel \vec{b}$, तो λ का मान ज्ञात कीजिए।

अध्याय–11

त्रिविमीय ज्यामिति

(Three Dimenstional Geometry)

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

प्र. 1 रेखा $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ और $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-5}{3}$ के बीच की लघुत्तम दूरी है –

(अ) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ इकाई (ब) $\frac{1}{\sqrt{6}}$ इकाई (स) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ इकाई (द) $\frac{1}{\sqrt{4}}$ इकाई ( )

प्र. 2 रेखाओं $\vec{a} = 5\hat{\imath} + 7\hat{\jmath} + 3\hat{k} + \lambda\left(5\hat{\imath} - 16\hat{\jmath} + 7\hat{k}\right)$ तथा $\vec{r} = (9\hat{\imath} + 13\hat{\jmath} + 15\hat{k} + \mu\left(3\hat{\imath} + 8\hat{\jmath} - 5\hat{k}\right)$ के मध्य लघुत्तम दूरी है –

(अ) 10 इकाई (लगभग) (ब) 12 इकाई

(स) 14 इकाई (लगभग) (द) 7 इकाई ( )

प्र. 3 x – अक्ष की दिक्कोज्याएँ है –

(अ) (0, 0, 1) (ब) (1, 0, 0) (स) (0, 1, 0) (द) (1, 1, 0) ( )

प्र. 4 यदि किसी रेखा के दिक् अनुपात 3, 4, 0 है तो उसकी दिक् कोज्याएँ हैं –

(अ) 9, 16, 0 (ब) 1, 1, 2 (स) $\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}$ (द) $\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0$ ( )

प्र. 5 यदि रेखाएँ $\frac{x-2}{3} = \frac{y-5}{m} = \frac{z-1}{2}$ तथा $\frac{x-0}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{1}$ परस्पर है तो m का मान होगा।

(अ) $m = \frac{3}{4}$ (ब) $m = \frac{-2}{3}$ (स) $\frac{3}{2}$ (द) $m = \frac{1}{2}$ ( )

प्र. 6 रेखाएँ $\frac{1-x}{3} = \frac{7y-14}{2P} = \frac{z-3}{2}$ और $\frac{7-7x}{3P} = \frac{y-5}{1} = \frac{6-z}{5}$ परस्पर लम्ब हैं तो P का मान ज्ञात कीजिए।

प्र. 7 x – अक्ष की दिक् दिक् कोज्याएँ ज्ञात कीजिए।

प्र. 8 एक रेखा x, y तथा z – अक्षों की धनात्मक दिशा के साथ क्रमशः 120^0, 45^0 और 90^0 का कोण बनाती है, तो दिक् कोसाइन ज्ञात कीजिए।

प्र. 9 बिन्दुओं (1, 0, 0) तथा (0, 1, 1) से गुजरने वाली रेखा की दिक्–कोसाइन ज्ञात कीजिए।

प्र. 10 एक रेखा का कार्तिय समीकरण $\frac{x-5}{3} = \frac{y+4}{7} = \frac{z-6}{2}$ है। इसका सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

प्र. 11 $\left(2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 4\hat{k}\right) \cdot \left(3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 4\hat{k}\right)$ का मान लिखिए।

RCSCE राजस्थान स्कूल शिक्षा परिषद
स्कूल शिक्षा विभाग, राजस्थान सरकार

प्र. 12 बिन्दु $(1, 2, 3)$ से गुजरने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो सदिश $3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 3\hat{k}$ के समान्तर है।

प्र. 13 सरल रेखा $\frac{x}{4} = \frac{y}{7} = \frac{z}{4}$ की दिक् कोसाइन ज्ञात कीजिए।

प्र. 14 रेखा $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{1}$ की दिक् कोसाइन ज्ञात कीजिए।

प्र. 15 एक रेखा x, y तथा $z-$ अक्षों की घनात्मक दिशा के साथ क्रमशः 90^0, 60^0 और 30^0 का कोण बनाती है तो दिक् – कोसाइन ज्ञात कीजिए।

प्र. 16 रेखा का समीकरण $\frac{4-x}{3} = \frac{y+3}{3} = \frac{z+2}{6}$ है, इस रेखा के समान्तर रेखा के दिक्कोज्या ज्ञात कीजिए।

प्र. 17 एक त्रिभुज की भुजाओं की दिक्–कोसाइन ज्ञात कीजिए। यदि त्रिभुज के शीर्ष बिन्दु (3,5,–4), (–1,1,2) और (–5, –5, –2) है।

प्र. 18 a का मान ज्ञात कीजिए जिनके लिए बिन्दु P(8, –7, a), Q (5, 2, 4) तथा R (6, –1, 2) संरेख है।

प्र. 19 सदिश $\vec{a} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 3\hat{k}$ के अनुदिश मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए। –

अध्याय–12

रैखिक प्रोग्रामन

(Linear Programming)

प्रश्न –

प्र. 1 निम्नलिखित व्यवरोधों के अन्तर्गत सुसंगत हल क्षेत्र दर्शाइए।

$8x + y \leq 40, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$

प्र. 2 निम्नलिखित व्यवरोधों के अन्तर्गत सुसंगत हल क्षेत्र दर्शाइए।

$2x + 3y \leq 18, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$

प्र. 3 निम्न व्यवरोधों के अन्तर्गत सुसंगत हल क्षेत्र दर्शाइए।

$2x + y \leq 6, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$

प्र. 4 निम्न व्यवरोधों के अन्तर्गत सुसंगत हल क्षेत्र उत्तर पुस्तिका में दर्शाइए।

$2x + y \geq 8, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$

प्र. 5 निम्न व्यवरोधों के अन्तर्गत सुसंगत हल क्षेत्र उत्तर पुस्तिका में दर्शाइए।

$x + 3y \geq 6, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$

प्र. 6 निम्न व्यवरोधों के अन्तर्गत सुसंगत हल क्षेत्र उत्तर पुस्तिका में दर्शाइए।

$2x + 3y \leq 6, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$

प्र. 7 रैखिक प्रोग्रामन समस्या का सुसंगत हल को परिभाषित कीजिए।

प्र. 8 निम्न व्यवरोधों के अन्तर्गत सुसंगत हल क्षेत्र को दर्शाओं।

प्रतिबंध $2x + 3y \leq 12$

$x \geq 2, \quad y \geq 1$

प्र. 9 उद्देश्य फलन क्या है ?

RCSCE राजस्थान स्कूल शिक्षा परिषद
स्कूल शिक्षा विभाग, राजस्थान सरकार

अध्याय–13

प्रायिकता

(Probability)

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

प्र. 1 यदि एक पासे को दो बार उछाला जाता है, तो प्रकट हुई संख्याओं का योग 7 पाए जाने की प्रायिकता होगी –

(अ) $\frac{5}{36}$ (ब) $\frac{1}{12}$ (स) $\frac{1}{6}$ (द) $\frac{1}{9}$ ( )

प्र. 2 यदि $P(A)=\frac{7}{13}$, $P(B)=\frac{9}{13}$ और $P(A \cap B)=\frac{4}{13}$ हो, $P(A/B)$ तो का मान है 7

(अ) $\frac{4}{9}$ (ब) $\frac{7}{9}$ (स) $\frac{5}{9}$ (द) $\frac{5}{13}$ ( )

प्र. 3 यदि एक सिक्के को तीन बार उछाला गया है, जहाँ E : तीसरी उछाल पर चित्त, F : पहली दोनों उछालों पर चित्त हो, $P\left(\frac{E}{F}\right)$ तो का मान है –

(अ) $\frac{1}{8}$ (ब) $\frac{1}{2}$ (स) $\frac{1}{4}$ (द) $\frac{1}{3}$ ( )

प्र. 4 यदि पासों का एक जोड़ा उछाला जाता है, तो प्रत्येक पासे पर सम अभाज्य संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता है –

(अ) 0 (ब) $\frac{1}{3}$ (स) $\frac{1}{12}$ (द) $\frac{1}{36}$ ( )

प्र. 5 यदि A और B स्वतंत्र घटनाएं है जहां $P(A)=0.3, P(B)=0.6$ तब $P(A \cap B)$ बराबर होगी ?

(अ) $\frac{1}{2}$ (ब) 2 (स) 1.8 (द) 0.18 ( )

प्र. 6 यदि $P(A/B) > P(A)$ तो निम्न में से सत्य है –

(अ) $P(B/A) < P(B)$ (ब) $P(A \cap B) < P(A) \cdot P(B)$

(स) $P(B/A) > P(B)$ (द) $P(B/A) = P(B)$ ( )

प्र. 7 यदि $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=0$ तो $P(A/B)$ है –

(अ) 0 (ब) $\frac{1}{12}$ (स) परिभाषित नहीं (द) 1 ( )

प्र. 8 यदि A और B दो घटनाएँ इस प्रकार है कि $P(A/B)=P(B/A)$ तब

(अ) $A \subset B$ (ब) $A = B$ (स) $A \cap B = \phi$ (द) $P(A) = P(B)$ ( )

प्र. 9 दो घटनाओं A और B को परस्पर स्वतत्र कहते हैं, यदि –

(अ) A और B परस्पर अपवर्जी है (ब) $P(A^1B^1) = [1-P(A)], [1-P(B)]$

(स) $P(A) = P(B)$ (द) $P(A) + P(B) = 1$ ( )

प्र. 10 A द्वारा सत्य बोलने की प्रायिकता $\frac{4}{5}$ है। एक सिक्का उछाला जाता है तथा A बताता है कि चित्त प्रदर्शित हुआ। वास्तविक रूप में चित्त प्रकट होने की प्रायिकता है –

(अ) $\frac{4}{5}$ (ब) $\frac{1}{2}$ (स) $\frac{1}{5}$ (द) $\frac{2}{5}$ ( )

प्र. 11 यदि A और B ऐसी घटनाएं हैं कि $A \subset B$ तथा $P(B) \neq 0$ तो निम्न में से कौन ठीक है –

(अ) $P(A/B) = \frac{P(B)}{P(A)}$ (ब) $P(A/B) < P(A)$

(स) $P(A/B) \geq P(A)$ (द) इनमें से कोई नहीं ( )

प्र. 12 यदि A और B दो ऐसी घटनाएं हैं कि $P(A) \neq 0$ और $P(B/A) = 1$ तब

(अ) $A \subset B$ (ब) $B \subset A$ (स) $B = \phi$ (द) $A = \phi$ ( )

प्र. 13 यदि A और B ऐसी दो घटनाएँ हैं कि $P(A) + P(B) - P(A$ और $B) = P(A)$ तब

(अ) $P(B/A) = 1$ (ब) $P(A/B) = 1$ (स) $P(B/A) = 0$ (द) $P(A/B) = 0$ ( )

प्र. 14 यदि $P(A) = \frac{3}{5}$, $P(B) = \frac{1}{5}$ और A तथा B स्वतंत्र घटनाएं है तो $P(A \cap B)$ .... है।

RCScE राजस्थान स्कूल शिक्षा परिषद
स्कूल शिक्षा विभाग, राजस्थान सरकार

खण्ड–ब

1. सम्बन्ध एवं फलन

अति लघुत्तरात्मक प्रश्न –

प्र. 1 यदि $F : R \to R$, $f(x) = x^2 - 5x + 7$ हो, तो $F^{-1}(1)$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्र. 2 यदि $F : R \to R$, $f(x) = \sin x$ तथा $g : R \to R$, $g(x) = x^2$ तो $gof(x)$ ज्ञात कीजिए।

प्र. 3 यदि $F : R \to R$, $f(x) = x^2 + 5x + 9$ हो, तो $f^{-1}(8)$ तथा $f^{-1}(9)$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्र. 4 $f(x) = 2x$ द्वारा प्रदत्त फलन $F : N \to N$, दर्शाइए कि $f(x)$ आच्छादक नहीं है।

प्र. 5 यदि $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$ तथा $f = \{(1, 4), (2,5), (3,6)\}$ A से B तक एक फलन हैं। सिद्ध कीजिए कि f एकैकी है।

प्र. 6 यदि $f(x) = x^3$ द्वारा प्रदत्त फलन $F : R \to R$ एकैक(injective) है।

प्र. 7 यदि $A = \{1, 2, 3\}$ हो तो ऐसे सम्बन्ध जिनमें अवयव (1, 2) तथा (1, 3) हो और जो स्वतुल्य तथा सममित हैं किन्तु संक्रामक नहीं हैं, की संख्या लिखिए।

प्र. 8 यदि समुच्चय $A = \{1,2, 3, 4 \ldots\ldots\ldots\ldots 14\}$ में सम्बन्ध इस प्रकार परिभाषित है कि –

$R = \{(x, y) : 3x - y = 0\}$ तो R का परिसर एवं प्रान्त ज्ञात कीजिए।

प्र. 9 यदि $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ तब $F[f(x)]$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्र. 10 यदि $f(x) = x^2 + 2x + 9$ तो $f(5)$ तथा $f(7)$ का मान ज्ञात कीजिए।

2. प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन (Inverse Trigonometrical Function)

प्र. 1 $\cos\left[\frac{\pi}{2} + \sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right]$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्र. 2 $\tan^{-1}\sqrt{3} - \cot^{-1}(-\sqrt{3})$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्र. 3 $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + 2\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्र. 4 यदि $\sin\left(\sin^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) + \cos^{-1}x\right) = 1$ तो x का मान ज्ञात कीजिए।

प्र. 5 $2\tan(\tan^{-1}x + \tan^{-1}x^3)$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्र. 6 $\cos^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)$ का मुख्य मान ज्ञात कीजिए।

RCSCE राजस्थान स्कूल शिक्षा परिषद
स्कूल शिक्षा विभाग, राजस्थान सरकार

प्र. 7 यदि $\sin^{-1}(1-x) - 2\sin^{-1}x = \frac{\pi}{2}$, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

प्र. 8 $\sin(\tan^{-1}x), |x| < |$ का मान किसके बराबर होता है।

प्र. 9 $\tan\left(sin^{-1}\frac{3}{5} + \cot^{-1}\frac{3}{2}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्र. 10 $\tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$, $x \neq 0$ को सरलतम रूप में लिखिए।

3. आव्यूह (Metrics)

प्र. 1 यदि $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$, तब A^2 ज्ञात कीजिए।

प्र. 2 यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$, तब $A + A^1$ ज्ञात कीजिए।

प्र. 3 यदि $A = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ तथा $B = [1, 4 - 6]$ तो AB ज्ञात कीजिए।

प्र. 4 A ज्ञात कीजिए, यदि $A + B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$ तथा $A - B = \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$

प्र. 5 यदि $2A + B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ तो A ज्ञात कीजिए।

प्र. 6 यदि $A = [1 \;\; 2 \;\; 3]$ तथा $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, तो $(AB)^1$ ज्ञात कीजिए।

प्र. 7 यदि $[x \; -3]\begin{bmatrix} 2x \\ 6 \end{bmatrix} = 0$ है, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

प्र. 8 एक ऐसे 2 x 2 आव्यूह $A = [a_{ij}]$ की रचना कीजिए, जिसके अवयव $a_i = |-5i + 2j|$ द्वारा दिए जाते है।

प्र. 9 यदि $A = [2 \;\; -4 \;\; 3]$ तथा $B = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ e \end{bmatrix}$, तो $(AB)^1$ ज्ञात कीजिए।

प्र. 10 A ज्ञात कीजिए, यदि $2A - \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

प्र. 11 निम्नलिखित समीकरण से x तथा y के मानों को ज्ञात कीजिए।

$$2\begin{bmatrix} x & 5 \\ 7 & y-3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 14 \end{bmatrix}$$

4. सारणिक (Deterninates)

प्र. 1 यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ हो, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए।

प्र. 2 सारणिक $\begin{vmatrix} 102 & 18 & 36 \\ 1 & 3 & 4 \\ 17 & 3 & 6 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्र. 3 यदि A एक 3 x 3 कोटि का वर्ग आव्यूह है तो | KA | का मान ज्ञात कीजिए।

प्र. 4 दूसरी पंक्ति के अवयवों के सहखंडों का प्रयोग करके

$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्र. 5 यदि सारणिक $A = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$ होतो प्रथम स्तम्भ के अवयवो की उपसारणिक एवं सहखण्ड लिखिए।

प्र. 6 सारणिक $\begin{vmatrix} x^2 - x + 1 & x - 1 \\ x + 1 & x + 1 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्र. 7 x का मान ज्ञात कीजिए यदि $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 4 \\ 6 & x \end{vmatrix}$

प्र. 8 निम्नलिखित रैखिक समीकरण निकाय को मैट्रिक्स रूप में व्यक्त कीजिए।

$$5x + 3y + x = 9$$

$$x - 2y + 4z = 3$$

$$2x + y - 4z = -1$$

प्र. 9 सारणिक $\begin{vmatrix} 1 \cdot & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ के सभी अवयवों के उपसारणिक व सहखण्ड ज्ञात कीजिए।

प्र. 10 यदि शीर्ष (2, –6), (5, 4) और (K, 4) वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल 35 वर्ग इकाई हो तो K का मान है।

5. सातत्य एवं अवकलनीयता

प्र. 1 दर्शाइए कि फलन $f(x) = x^2, x = 0$ पर संतत् है।

प्र. 2 $f(x) = \begin{cases} Kx + 1, & \textbf{यदि} \quad x \leq 2 \\ 3x - 5, & \textbf{यदि} \quad x > 2 \end{cases}$ $x = 2$ यदि पर सांतत्य है तो K का मान ज्ञात कीजिए।

प्र. 3 $f(x) = \begin{cases} Kx + 1, & \textbf{यदि} \quad x \leq 5 \\ 3x - 5, & \textbf{यदि} \quad x > 5 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन $x = 5$ पर है तो K का मान ज्ञात कीजिए।

प्र. 4 $f(x) = \sec\left(\tan\left(\sqrt{x}\right)\right)$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्र. 5 $f(x) = 2\sqrt{\cot(x^2)}$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्र. 6 यदि $y + \sin y = \cos x$ तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

प्र. 7 यदि $xy + y^2 = \tan x + y$, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

प्र. 8 यदि x^x फलन का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए।

प्र. 9 यदि $x = 2a\,t^2$, $y = a\,t^4$, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

प्र. 10 यदि $y = x^3 + \tan x$ है तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात कीजिए।

6. अवकलज के अनुप्रयोग

प्र. 1 एक वृत्त की त्रिज्या 0.7 cm/s की दर से बढ़ रही है। इसकी परिधि की वृद्धि की दर क्या है जब $r = 4.9$ cm है।

प्र. 2 किसी उत्पाद की x इकाइयों के विक्रय से प्राप्त कुल आय रुपयों में $R(x) = 3x^2 + 36x + 5$ से प्रदत्त है। जब $x = 15$ है तो सीमान्त आय ज्ञात कीजिए।

प्र. 3 एक वृत्त की त्रिज्या $r = 6$cm पर r के सापेक्ष क्षेत्रफल में परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए।

प्र. 4 दिखाइये कि प्रदत्त फलन $f(x) = 7x - 3$, R पर एक वर्धमान फलन है ?

प्र. 5 सिद्ध कीजिए कि R में दिया गया फलन $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3 - 100$ वर्धमान है।

प्र. 6 ऐसी दो संख्याएं ज्ञात कीजिए जिनका योग 24 है और जिनका गुणनफल उच्चतम हो।

प्र. 7 वक्र $x^2 = 2y$ पर (0, 5) से न्यूनतम दूरी पर स्थित बिन्दु ज्ञात कीजिए।

प्र. 8 x, सभी वास्तविक मानों के लिए $\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$ का न्यूनतम मान है।

प्र. 9 $[x\,(x-1)+1]^{1/3}$, $0 \le x \le 1$ का उच्चतम मान है।

7. समाकलन

प्र. 1 $\int a^{3\log a^x}\,dx$ मान ज्ञात कीजिए –

प्र. 2 $\int \frac{\tan x}{\cot x}\,dx$ ज्ञात कीजिए –

प्र. 3 $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$ ज्ञात कीजिए –

प्र. 4 $\int xe^x\,dx$ ज्ञात कीजिए –

प्र. 5 $\int \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}\, dx$ ज्ञात कीजिए।

प्र. 6 $\int \frac{1}{1+\sin x}\, dx$ ज्ञात कीजिए।

प्र. 7 $\int \sqrt[3]{x^4}\, dx$ का ज्ञात कीजिए।

प्र. 8 $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{tan^2 x+4}}\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्र. 9 $\int e^x \left(tan^{-1}x + \frac{1}{1+x^2}\right) dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्र. 10 $\int \frac{2-3\sin x}{cos^2 x}\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

8. समाकलनों के अनुप्रयोग

प्र. 1 वक्र $y = x|x|$, x– अक्ष एवं कोटियों $x = -1$ तथा $x = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

प्र. 2 $x = 0$ एवं $x = 2\pi$ तथा वक्र $y = \sin x$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

प्र. 3 $y = x^2, x = 1, x = 2$ एवं x– अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

9. अवकल समीकरण

प्र. 1 अवकल समीकरण $(1+x^2)\, dy = (1 + y^2)\, dx$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

प्र. 2 अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \sqrt{4 - y^2}$ $(-2 < y < 2)$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए ।

प्र. 3 वक्रों के कुल $y = a \sin (x + b)$, जिसमें a, b स्वेच्छ अचर है, को निरूपित करने वाले अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए।

प्र. 4 अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + y \sec x = \tan x$ का समाकल गुणांक ज्ञात कीजिए।

प्र. 5 अवकल समीकरण $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \sin\left(\frac{dy}{dx}\right) + 1 = 0$ की घात ज्ञात कीजिए।

प्र. 6 अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \sin (x+y)$ को हल करें।

प्र. 7 अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = 1 + x + y + xy$ को हल करो।

प्र. 8 अवकल समीकरण $y = \frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3}$ की घात एवं कोटि ज्ञात कीजिए।

प्र. 9 दिखाइए $y = e^x + 1$, समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 0$ का हल है।

प्र. 10 अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{2-y}$, $y \neq 2$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

10. सादिश

प्र. 1 सदिश $\vec{a} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 4\hat{k}$ के अनुदिश मात्रक (इकाई) सदिश ज्ञात कीजिए।

प्र. 2 यदि दो सदिशों $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के परिमाण क्रमशः 1 तथा 2 हैं और $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$, तो इन सदिशों के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

प्र. 3 सदिश $\hat{\imath} - \hat{\jmath}$ का सदिश $\hat{\imath} + \hat{\jmath}$ पर प्रक्षेप ज्ञात कीजिए।

प्र. 4 सदिश $2\hat{\imath} - \hat{\jmath}$ तथा $\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$ के मध्य का कोण ज्ञात कीजिए।

प्र. 5 यदि $|\vec{a}| = 0, |\vec{b}| = 2$ तथा $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$ हो, तो $\sin\theta$ का मान ज्ञात कीजिए। जहाँ θ, सदिश $\vec{a}$ व $\vec{b}$ के मध्य का कोण है।

प्र. 6 $\left(2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 4\hat{k}\right) \times \left(3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 4\hat{k}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्र. 7 दर्शाइए कि बिन्दु A (2, 3, 4), B(–1, 2, –3) तथा (–4, 1, –10) संरेख है।

प्र. 8 सदिशों $\vec{a} = 2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 5\hat{k}$ और $\vec{b} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 3\hat{k}$ के योगफल के अनुदिश मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए।

प्र. 9 एक सदिश का प्रारम्भिक बिन्दु (2, 1) है और अन्तिम बिन्दु (–5, 7) है। इस सदिश के सदिश घटक ज्ञात कीजिए।

प्र. 10 बिन्दुओं P $\left(\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}\right)$ और Q $\left(-\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}\right)$ को मिलाने वाली रेखा को 2 : 1 के अनुपात में अंतः विभाजित करने वाले बिन्दु का स्थिति सदिश ज्ञात कीजिए।

11. त्रि–विमिय

प्र. 1 दर्शाइए कि सदिश $2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 4\hat{k}$ और $-4\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} - 8\hat{k}$ संरेख हैं।

प्र. 2 बिन्दु (1, 2, 3) से गुजरने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो संदिश $2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 3\hat{k}$ के समान्तर है।

प्र. 3 यदि $\vec{a} = 2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 3$, $\vec{b} = -\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + \hat{k}$ और $\vec{c} = 3\hat{\imath} + \hat{\jmath}$ इस प्रकार है कि $\vec{a} + \lambda\vec{b}, \vec{c}$ पर लम्ब है तो λ का मान ज्ञात कीजिए।

RCSCE राजस्थान स्कूल शिक्षा परिषद
स्कूल शिक्षा विभाग, राजस्थान सरकार

प्र. 4 यदि रेखाएँ $\frac{x-1}{-3}=\frac{y-2}{2K}\pm\frac{z-3}{-5}$ और $\frac{x-1}{3K}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-6}{-5}$ परस्पर लम्ब है तो K का मान ज्ञात कीजिए।

प्र. 5 x–अक्ष के समान्तर तथा मूल – बिन्दु से जाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

12. रैखिक प्रोग्रामन

प्र. 1 न्यूनतम करो $Z = 5x + 2y$

प्रतिबंध $x + y \geq 10$

$2x + 3y \geq 20$

$x + 3y \geq 15$

ऋणेत्तर प्रतिबंध $x \geq 0 \ , \ y \geq 0$

प्र. 2 अधिकतम करो – $Z = 2x + 5y$

$x - 4y \leq 24$

$3x + 4y \leq 21$

$x + y \leq 9$

ऋणेत्तर प्रतिबंध $x \geq 0 \ , \ y \geq 0$

प्र. 3 अधिकतम करो $Z = x + y$

$x - y \leq -1$

$-x + y \leq 0$

$x, y \geq 0$

प्र. 4 न्यूनतम करो – $Z = 5x + y$

$3x + 5y \geq 15$

$5x + 2y \geq 10$

ऋणेत्तर प्रतिबंध $x \geq 0 \ , \ y \geq 0$

प्र. 5 अधिकतम करो – $Z = 8x + 7y$

प्रतिबंध $3x + y \leq 66$

$x + y \leq 45$

ऋणेत्तर प्रतिबंध $x \leq 20 \ , \ y \leq 40 \ , \ x \geq 0 \ , \ y \geq 0$

प्र. 6 न्यूनतम करो – $Z = 6x + 21y$

प्रतिबंध $x + 2y \geq 3$

$x + 4y \geq 4$

ऋणेत्तर प्रतिबंध $x \geq 0 \ , \ y \geq 0$

13. प्रायिकता

प्र. 1 यदि A और B दो स्वतंत्र घटनाएं है, जहाँ $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$ तथा $P(B) = x$ तब x का मान ज्ञात कीजिए।

प्र. 2 यदि A और B स्वतंत्र घटनाएं है तथा P(A) = 0.3 और P(B) = 0.4, तब $P(A \cup B)$ के मान ज्ञात कीजिए।

प्र. 3 52 पत्तों की एक गड्डी मेंसे यादृच्छया एक के बाद एक बिना प्रतिस्थापित किए दो पत्ते निकाले गए। दोनों पत्तों के लाल रंग का होनी की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

प्र. 4 यदि A और B स्वतंत्र घटनाएं है तथा P(A) = 0.2 और P(B) = 0.5 तब $P(A \cup B)$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्र. 5 यदि P(B/A) = 0.2 और P(A) = 0.8, तो $P(A \cap B)$ ज्ञात कीजिए।

प्र. 7 यदि P(A) = 0.6, P(B) = 0.3 और $P(A \cap B) = 0.2$ हो, तो P(A/B) ज्ञात कीजिए।

प्र. 8 यदि $P(A) = \frac{6}{11}$, $P(B) = \frac{5}{11}$ और $P(A \cup B) = \frac{7}{11}$ हो, तो $P(A \cap B)$ ज्ञात कीजिए।

प्र. 9 यदि $P(A) = \frac{5}{11}$, $P(B) = \frac{6}{11}$ और $P(AOB) = \frac{4}{11}$ हो, तो P(A/B) ज्ञात कीजिए।

प्र. 10 एक अनभिनत (unbiased) पासे को दो बार उछाला गया। मान ले A घटना 'पहली उछाल पर विषम संख्या प्राप्त होना' और B घटना 'द्वितीय उछाल पर विषम संख्या प्राप्त होना दर्शाते है। घटनाओं A और B के स्वातंत्रय का परिक्षण कीजिए।

खण्ड–स

1. सम्बन्ध एवं फलन

प्र. 1 यदि $f : R \to R$ और $g : R \to R$ इस प्रकार परिभाषित है कि $f(x) = x^2 + 3$, $g(x) = 1 - \frac{1}{1-x}$ तो $gof(x)$ और $fog(x)$ ज्ञात कीजिए।

प्र. 2 यदि $f(x) = \frac{x-3}{x+1}$ हो, तो $f[f\{f(x)\}]$ ज्ञात कीजिए।

प्र. 3 $f(x) = 2x + 3$ द्वारा प्रदत्त फलन $f : R \to R$ पर विचार करते हुए सिद्ध कीजिए कि f व्युक्रमणीय है।

प्र. 4 सिद्ध कीजिए कि R में $R = \{(a,b) : a \leq b\}$ द्वारा परिभाषित सम्बन्ध स्वतुल्य तथा संक्रामक हैं किन्तु सममित नहीं है। (यहाँ R वास्तविक संख्याओं का समुच्चय हैं।)

प्र. 5 जाँच कीजिए कि वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R में $R^* = \{(a,b) ; a \leq b^2$ द्वारा परिभाषित सम्बन्ध R^* न तो स्वतुल्य, न सममित और न ही संक्रामक है।

प्र. 6 जाँच कीजिए कि क्या समुच्चय {1, 2, 3, 4, 5, 6} में $R = \{(a,b) : b = a + 1\}$ द्वारा परिभाषित सम्बन्ध R स्वतुल्य, सममित या संक्रामक है।

प्र. 7 सिद्ध कीजिए कि $f(x) = x^3$ द्वारा प्रदत्त फलन $f : R \to R$ एकैक (injective) है।

2. प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन

प्र. 1 फलन $\tan^{-1}\left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right)$, $x < \pi$ को सरलतम रूप में लिखिए।

प्र. 2 सिद्ध कीजिए कि $\tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\right] = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\cos^{-1}x$, $0 < x < 1$

प्र. 3 सिद्ध कीजिए –

$$\tan^{-1}\frac{63}{16} = \sin^{-1}\frac{5}{13} + \cos^{-1}\frac{3}{5}$$

प्र. 4 फलन $\tan^{-1}\left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right)$; $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$ को सरलतम रूप में व्यक्त करें।

प्र. 5 सिद्ध कीजिए $\sin^{-1}\frac{8}{17} + \sin^{-1}\frac{3}{5} = \tan^{-1}\frac{77}{36}$

प्र. 7 दर्शाइए कि –

$$\sin^{-1}\frac{3}{5} - \sin^{-1}\frac{8}{17} = \cos^{-1}\frac{84}{85}$$

RCSCE राजस्थान स्कूल शिक्षा परिषद
स्कूल शिक्षा विभाग, राजस्थान सरकार

3. आव्यूह (Matrix)

प्र. 1 यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ है तो $A^2 - 5A + 6I$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्र. 2 यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ और $A^2 - 4A = KI_3$ हो, तो K का मान ज्ञात कीजिए।

(यहाँ I_3 एक 3 क्रम का तत्समक आव्यूह है।)

प्र. 3 यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ हो तो सिद्ध कीजिए कि $A^2 - 5A + 7I = 0$ है तथा इसकी सहायता से A^{-1} ज्ञात कीजिए।

प्र. 4 यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & -\tan \alpha/2 \\ tan \alpha/2 & 0 \end{bmatrix}$ तथा $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ है तो

सिद्ध कीजिए कि $I + A = (I - A) \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$

प्र. 5 आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ को एक सममित आव्यूह तथा एक विषम सममित आव्यूह के योगफल के रूप में व्यक्त कीजिए।

प्र. 6 यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ है तो सिद्ध कीजिए कि $A^2 - 5A + 7I_2 = 0$ जहाँ I_2 एक आव्यूह है।

प्र. 7 यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ हो तो $2A^2 - 3B$ ज्ञात कीजिए।

प्र. 8 यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $(AB)^T = B^T \cdot A^T$

प्र. 9 यदि $A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ हो, तो AA^T ज्ञात कीजिए,

जहाँ I, 3 x 3 क्रम का इकाई आव्यूह है।

प्र. 10 यदि $A = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$, $B = [1 \;\; 3 \;\; -6]$, तो सत्यापित कीजिए कि $(AB)^1 = B^1 A^1$

प्र. 11 यदि $x + y = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ तथा $x - y = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ तो x तथा y ज्ञात कीजिए।

RCSCE राजस्थान स्कूल शिक्षा परिषद
स्कूल शिक्षा विभाग, राजस्थान सरकार

4. सारणिक (Determinants)

प्र. 1 क्रेमर नियम का प्रयोग कर निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिए।

$5x - 4y = 7$

$x + 3y = 9$

प्र. 2 रैखिक समीकरण निकाय $x + y + 2z = 0, x + 2y - 2 = 9, x - 3y + 3z = -14$ को आव्यूह सिद्धान्त द्वार हल कीजिए।

प्र. 3 निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिए।

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2y \\ z \\ 3y \end{bmatrix}$$

प्र. 4 दर्शाइए कि बिन्दु A (a, b + c), B (b, c + a) और C (c, a + b) सरेख हैं।

प्र. 5 निम्नलिखित समीकरण निकाय को आव्यूह विधि से हल कीजिए।

$5x + 2y = 4$

$7x + 3y = 5$

प्र. 6 x के किस मान के लिए –

$$[1 \quad 2 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ x \end{bmatrix} = 0 \text{ है।}$$

प्र. 7 सारणिक के गुणधर्मों का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि –

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a - b)\,(b - c)\,(c - a)$$

प्र. 8 यदि सारणिक $A = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$ हो तो प्रथम स्तम्भ के अवयव की उपसारणिक एवं सहखण्ड लिखिए।

5. सांतव्य तथा अवकलनीयता

प्र. 1 यदि $y = e^{msin^{-1}x}$, तब सिद्ध कीजिए कि $(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - m^2y = 0$

RCSCE राजस्थान स्कूल शिक्षा परिषद
स्कूल शिक्षा विभाग, राजस्थान सरकार

प्र. 2 a तथा b के मानों को ज्ञात कीजिए कि –

$$f(x) = \begin{cases} 5 & \textbf{यदि} \quad x \le 2 \\ ax + b & \textbf{यदि} \quad 2 < x < 10 \\ 21 & \textbf{यदि} \quad x \ge 10 \end{cases}$$

प्र. 3 दर्शाइए कि फलन

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x & , \textbf{यदि} \quad x < 1 \\ 2 & , \textbf{यदि} \quad x = 1 \\ 1 + x & , \textbf{यदि} \quad x > 1 \end{cases}$$

प्र. 4 K का मान ज्ञात कीजिए ताकि प्रदत्त फलन $x = \frac{\pi}{2}$ पर संतत् हो।

$$f(x) = \begin{cases} \frac{K \cos x}{\pi - 2x} & ; \quad x \neq \pi/2 \\ 5 & ; \quad x = \pi/2 \end{cases}$$

प्र. 5 दर्शाइए कि फलन

$$f(x) = \begin{cases} x + 5 & , \quad x \le 1 \\ x - 5 & , \quad x > 1 \end{cases}, x = 1 \text{ पर संतत् है।}$$

प्र. 6 फलन $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} + \cos x & ; \quad x \neq 0 \\ K & ; \quad x = 0 \end{cases}$ बिन्दु $x = 0$ पर संतत् है, तो K का मान ज्ञात कीजिए।

प्र. 7 फलन $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{1/x}}{1 + e^{1/x}} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$ का $x = 0$ पर सांतत्य का परीक्षण कीजिए।

प्र. 8 फलन $f(x) = |x - 1| + 2|x - 2| + 3|x - 3|$ की बिन्दु $x = 1, 2, 3$ पर सांतत्यता एवं अवकलनीयता का परीक्षण कीजिए।

प्र. 9 यदि $y = \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$; $0 < x < 1$, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

प्र. 10 यदि $y = 3\cos x - 2\sin x$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

प्र. 11 सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & , \textbf{यदि} \quad x \neq 0 \\ 1 & , \textbf{यदि} \quad x = 0 \end{cases}$ $x = 0$ पर संतत् नहीं है।

6. अवकलज के अनुप्रयोग

प्र. 1 एक 28m लम्बे तार को दो टुकड़ों में विभक्त किया जाता है। एक टुकड़े से वर्ग तथा दूसरे से वृत्त बनाया जाता है। दोनों टुकड़ों की लम्बाइयाँ कितनी होनी चाहिए जिसके वर्ग एवं वृत्त का सम्मिलित क्षेत्रफल न्यूनतम हो ?

प्र. 2 सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = \log\cos x$, $(0, \pi/2)$ में निरन्तर ह्रासमान और $(\pi/2, \pi)$ में निरन्तर वर्धमान है।

प्र. 3 एक वृत्त की त्रिज्या समान रूप से की दर से 5cm/s बढ़ रही है। ज्ञात कीजिए कि वृत्त का क्षेत्रफल किस दर से बढ़ रहा है।

प्र. 4 यदि लाभ फलन $P(x) = 51 - 72x - 18x^2$ से प्रदत्त है तो किसी कंपनी द्वारा अर्जित उच्चतम लाभ ज्ञात कीजिए।

प्र. 5 अंतराल ज्ञात कीजिए जिसमें $f(x) = x^2 - 4x + 6$ फलन f

(i) वर्धमान है (ii) ह्रासमान है।

प्र. 6 x मीटर भुजा वाले धन की भुजा में 2% की वृद्धि के कारण से घन के आयतन में सन्निकट परिवर्तन ज्ञात कीजिए।

प्र. 7 वह अन्तराल ज्ञात कीजिए, जिसमें फलन $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 7$

(i) वर्धमान है (ii) ह्रासमान हैं।

7. समाकलन

प्र. 1 मान ज्ञात कीजिए कि $\int \sqrt{5 - 4x - x^2}\, dx$

प्र. 2 मान ज्ञात कीजिए – $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{(1+\sin x)(2+\sin x)}\, dx$

प्र. 3 मान ज्ञात करें $\int \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\, dx$

प्र. 4 $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्र. 5 ज्ञात कीजिए : $\int \frac{dx}{e^x - 1}$

प्र. 6 ज्ञात कीजिए : $\int x\tan^{-1} x\, dx$

प्र. 7 ज्ञात कीजिए : $\int \frac{dx}{\sqrt{9+8x-x^2}}$

प्र. 8 $\int \frac{(x-1)(x-\log x)^3}{x}\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्र. 9 ज्ञात कीजिए कि $\int \log(x^2 + 1)\, dx$

प्र. 10 ज्ञात कीजिए $\int \frac{1}{3x^2 + 6x + 2}\, dx$

8. समाकलनों के अनुप्रयोग

प्र. 1 रेखा $y = 3x + 2$, x– अक्ष एवं कोटियों $x = -1$ एवं $x = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

प्र. 2 दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

प्र. 3 समाकलन का उपयोग करते हुए एक ऐसे त्रिकोणीय क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। जिसकी भुजाओं के समीकरण $y = x + 1$, $y = 2x + 1$ एवं $x = 2$ हैं।

प्र. 4 पहले चतुर्थांश में परवलय $y^2 = 16x$ और रेखाओं $x = 1$, $x = 4$ और x–अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

प्र. 5 वृत्त $x^2 + y^2 = 1$ तथा वक्र $y = |x|$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

9. अवकल समाकरण

प्र. 1 हल कीजिए –

$$\frac{dy}{dx} + (2x \tan^{-1} y - x^3)(1+y^2) = 0$$

प्र. 2 हल कजिए –

$$(1 + y^2) + \left(x - e^{tan^{-1}y}\right) \frac{dy}{dx} = 0$$

प्र. 3 अवकल समीकरण $x \frac{dy}{dx} + 2y = x^2$, $(x \neq 0)$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

प्र. 4 अवकल समीकरण $x \frac{dy}{dx} - y = 2x^2$ का समाकलन गुणक ज्ञात कीजिए।

प्र. 5 अवकल समीकरण $ydy - (x + 2y^2)dy = 0$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

10. सदिश बीजगणित

प्र. 1 दो इकाई सदिशों $\hat{a}$ व $\hat{b}$ के मध्य कोण θ है तो सिद्ध कीजिए।

$$\frac{\sin\theta}{2} = \frac{1}{2}\left|\hat{a} - \hat{b}\right|$$

प्र. 2 सदिशों $\vec{a}$ व $\vec{b}$ के लिए सिद्ध कीजिए कि $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|^2 = |\vec{a}|^2 \left|\vec{b}\right|^2 - \left|\vec{a} \cdot \vec{b}\right|^2$

प्र. 3 यदि बिन्दुओं A, B, C और D के स्थिति सदिश क्रमशः $\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}, 2\hat{\imath} + 5\hat{\jmath}, 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 3\hat{k}$ और $\hat{\imath} - 6\hat{\jmath} - \hat{k}$ है तो $\overrightarrow{AB}$ तथा $\overrightarrow{CD}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

प्र. 4 यदि $\vec{a} = 2\hat{l} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{b} = -\hat{l} + 2\hat{j} + \hat{k}$ और $\vec{c} = 3\hat{l} + \hat{j}$ इस प्रकार है कि $\vec{a} + \tau\vec{b}$ सदिश $\vec{c}$ पर लम्ब है, तो ι का मान ज्ञात कीजिए।

प्र. 5 एक $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष बिन्दु A(1, 1, 1), B(1, 2, 3) और C (2, 3, 3) है।

प्र. 6 यदि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ मात्रक सदिश इस प्रकार है कि $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ तो $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्र. 7 सदिशों $2\hat{l} - \hat{j} + \hat{k}$ तथा $3\hat{l} + \hat{j} + 2\hat{k}$ का सदिश गुणनफल ज्ञात कीजिए।

11. त्रिविमीय ज्यामिति

प्र. 1 रेखाओं $\vec{r} = (\hat{l} + 2\hat{j} + \hat{k}) + \tau(\hat{l} - \hat{j} + \hat{k})$ और $\vec{r} = (2\hat{l} + \hat{j} - \hat{k}) + \mu(2\hat{l} + \hat{j} + 2\hat{k})$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

प्र. 2 रेखाओं $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{1}$ और $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+1}{2}$ के मध्य की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

12. रैखिक प्रोग्रामन

प्र. 1 आलेखीय विधि से निम्नलिखित रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल कीजिए –

व्यवरोधो $x + 2y \le 12$

$2x + y \le 12$

$x + \frac{5}{4}y \ge 5, x \ge 0$ के अन्तर्गत

प्र. 2 आलेखीय विधि से निम्नलिखित रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल कीजिए –

व्यवरोधों के अन्तर्गत का अधिकतमीकरण कीजिए।

प्र. 3 आलेखीय विधि से निम्नलिखित रैखिक प्रोग्रामन समस्या को न्यूनतमीकरण के लिए हल कीजिए।

उद्देश्य $x = 5x + y$

व्यवरोध $3x + 5y \ge 15$

$5x + 2y \le 0, x \ge 0, y \ge 0$

13. प्रायिकता

प्र. 1 एक थैले में 4 लाल और 6 काली गेंदे है और एक अन्य थैले में 3 लाल और 5 काली गेंदे है। दोनों थैलो में से एक को यादृच्छया चुना जाता है और उसमें से एक गेंद निकाली जाती है जो कि लाल है। इस बात की क्या प्रायिकता है कि गेंद दूसरे थैले से निकाली गई है ?

प्र. 2 एक पासे को दो बार उछाला गया और प्रकट हुई संख्याओं का योग 7 पाया गया। संख्या 3 के न्युनतम एक बार प्रकट होने की सप्रतिबंध प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

प्र. 4 यदि एक सिक्के को 10 बार उछाला जाता है, ठीक चार पट आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

प्र. 5 दो पासों के एक जोड़े को तीन बार उछालने पर द्विको (doublet) की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए।

खण्ड–द

1. सम्बन्ध एवं फलन

निबन्धात्मक प्रश्न –

प्र. 1 यदि R तथा S समुच्चय A में तुल्यता सम्बन्ध है तब सिद्ध कीजिए कि सम्बन्ध R∩S भी एक तुल्यता सम्बन्ध है।

प्र. 2 सिद्ध कीजिए कि समुच्चय z में परिभाषित संबंध R, aRb $\Leftrightarrow$ a – b, 3 से विभाज्य है, एक तुल्यता संबंध है।

प्र. 3 यदि f, g : R $\rightarrow$ R फलन इस प्रकार परिभाषित है कि f(x) = x^2 + 1, g(x) = 2x – 3 तो fog(x), gof(x) तथा gog(3) ज्ञात कीजिए।

प्र. 4 यदि f, g : R $\rightarrow$ R फलन इस प्रकार परिभाषित है कि f(x) = x^2, g(x): 2x तो fog(x), gof(x) तथा fof(3) ज्ञात कीजिए।

2. प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन

प्र. 1 $\tan^{-1}\left(\frac{\cos\theta-\sin x}{\cos\theta+\sin x}\right)$, $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$ को सिद्ध कीजिए।

प्र. 2 सिद्ध कीजिए $\tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cos^{-1}x$, $\frac{-1}{2} \leq x \leq 1$

(संकेत $x = \cos 2\theta$ रखिए)

3 आव्यूह

प्र. 1 यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{tan\theta}{2} \\ \frac{-tan\theta}{2} & 1 \end{bmatrix}$ हो तो सिद्ध करो –

$AA^{-1} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}$

प्र. 2 यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ तो सिद्ध कीजिए $A^3 - 6A^2 + 9A - 4I = 0$ तथा इसकी सहायता से A^{-1} ज्ञात कीजिए।

प्र. 3 यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ तो सिद्ध कीजिए A^{-1} ज्ञात कीजिए।

तथा इसकी सहायता से निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए।

$$2x - 3y + 5z = 11$$

$$3x + 2y - 4z = -5$$

$$x + y - 2z = -3$$

4. सारणिक

प्र. 1 आव्यूह सिद्धान्त का प्रयोग कर निम्नलिखित रैखिक समीकरण निकाय को हल कीजिए –

$$3x - y + z = 3$$

$$2x + y - z = 2$$

$$-x + y + z = 1$$

प्र. 2 सारणिक $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 8 & 3 & 3 \\ 9 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ में सभी अवयवों का उपसारणिक ज्ञात कीजिए।

5. सातत्य तथा अवकलनीयता

प्र. 1 सिद्ध कीजिए कि $\frac{d}{dx}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} sin^{-1} \frac{x}{a}\right] = \sqrt{a^2 - x^2}$

प्र. 2 यदि $x^y = y^x = b^a + a^b$ तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

प्र. 3 यदि $y = x^x + x^a + a^x + a^a$ हो, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

प्र. 4 यदि $y = x^x + x^p + p^x + p^p, p > 0$ और $x > 0$ है तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

प्र. 5 यदि $x^2 + y^2 = t - \frac{1}{t}$ तथा $x^4 + y^4 = t^2 + \frac{1}{t^2}$, तब सिद्ध कीजिए $x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = 0$

प्र. 6 x के सापेक्ष $(\log x)^{\cos x}$ का अवकलन कीजिए।

प्र. 7 यदि $y = 500\, e^{7x} + 600\, e^{-7x}$ है तो दर्शाइए कि $\frac{d^2y}{dx^2} = 49\, y$

6. अवकलज के अनुप्रयोग

प्र. 1 अन्तराल $[1, 5]$ में $f(x) = x^2 - 4x + 8$ द्वारा प्रदत्त फलन के निरपेक्ष उच्चतम और निम्नतम मानों को ज्ञात कीजिए।

प्र. 2 अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें $f(x) = x^2 - 6x + 5$ से प्रदत्त फलन f

(a) निरंतर वर्धमान है। (b) निरंतर ह्रासमान है।

प्र. 3 अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें $f(x) = \sin x + \cos x; 0 \leq x \leq 2\pi$ से प्रदत्त फलन f

(a) निरंतर वर्धमान है। (b) निरंतर ह्रासमान है।

प्र. 4 सिद्ध कीजिए कि दी गई तिर्यक ऊँचाई और महत्तम आयतन वाले शंकु का अर्द्ध शीर्ष कोण $\tan^{-1}\sqrt{2}$ होता है।

7. समाकलन

प्र. 1 मान ज्ञात कीजिए कि $\int \frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)\left[log\left(x^2+1\right)-2\log x\right]}{x^4}\, dx$

प्र. 2 मान ज्ञात कीजिए कि $\int_1^2 \frac{xe^x}{(1+x)^2}\, dx$

प्र. 3 मान ज्ञात कीजिए कि $\int \frac{dx}{\sqrt{sin^3 x \sin(x+\alpha)}}$

प्र. 4 मान ज्ञात कीजिए कि $\int_o^\pi (\log(1 + \cos x)dx$

प्र. 6 सिद्ध कीजिए $\int_0^\pi \frac{x\, dx}{a^2cos^2x + b^2sin^2x} = \frac{\pi^2}{2ab}$

प्र. 7 सिद्ध कीजिए कि $\int_0^\pi \log(1 + \cos x)dx = \pi \log\left(\frac{1}{2}\right)$

प्र. 8 $\int_0^\pi \frac{xsin\, x}{1+cos^2x}\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्र. 9 $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} sin^2x dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्र. 10 $\int_{-1}^{1} 5x^4\sqrt{x^5+1}\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

9. अवकल समीकरण

प्र. 1 अवकल समीकरण $2xydy = (x^2 + y^2)\, dx$ को हल कीजिए।

प्र. 2 अवकल समीकरण $(1 + x^2)\, dy + 2xydx = \cot x\, dx$ का एक विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए, दिया हुआ है कि $y = 0$ यदि $x = \frac{\pi}{2}$

प्र. 3 अवकल समीकरण $xdy = ydx + \sqrt{x^2 + y^2}\, dx$ को हल कीजिए।

प्र. 4 अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + y\cot x = 2x + x^2 \cot x\ (x \neq 0)$ का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए, दिया हुआ है कि $y = 0$, जब $x = \frac{\pi}{2}$

प्र. 5 अवकल समीकरण $(x^2 + y^2)\, dx - 2x\, ydy = 0$ को हल कीजिए।

प्र. 6 अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + 2y\cot x = 4x\ \text{cosec}\ x\ (x \neq 0)$ का एक विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए, दिया हुआ है कि $y = 0$, जब $x = \frac{\pi}{2}$

प्र. 7 अवकल समीकरण $2xy + y^2 - 2x^2 \frac{dy}{dx} = 0$ को हल कीजिए।

प्र. 8 अवकल समीकरण $(x - y)dy - (x + y)dx = 0$ को हल कीजिए।

प्र. 9 अवकल समीकरण $\cos^2 x \frac{dy}{dx} + y = \tan x\ \ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ हो हल कीजिए।

प्र. 10 अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+1}{2x+2y+3}$ का हल ज्ञात कीजिए।

प्र. 11 अवकल समीकरण $(\tan^{-1} y - x)dy = (1 + y^2)dx$ का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए यदि $x = 0$ तथा $y = 0$

प्र. 12 अवकल समीकरण $x(x - y)dy = y(x + y)dx$ का हल ज्ञात कीजिए।

10. सदिश (Vector)

प्र. 1 सिद्ध कीजिए कि रेखाएं $\vec{r} = \left(\hat{l} + \hat{l} + \hat{k}\right) + \tau\left(3\hat{l} - \hat{j}\right)$ और $\vec{r} = \left(4\hat{l} - \hat{k}\right) + \mu\left(2\hat{l} + 3\hat{k}\right)$ प्रतिच्छेद करती है, प्रतिच्छेद बिन्दु के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।

प्र. 2 बिन्दु P (1, 1, 3) से रेखा $\frac{x-4}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$ पर डाले गये लम्ब का पाद कीजिए साथ ही दिये गये बिन्दु से रेखा की लम्बवत् दूरी ज्ञात भी कीजिए।

प्र. 3 निम्नलिखित रेखा युग्मों के मध्य न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए –

(i) $\frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+3}{-3}$ तथा $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{2}$

RCSCE राजस्थान स्कूल शिक्षा परिषद
स्कूल शिक्षा विभाग, राजस्थान सरकार

(ii) $\vec{r} = \hat{l} + 2\hat{l} - 4\hat{k} + \tau\left(2\hat{l} + 3\hat{j} + 6\hat{k}\right)$ तथा

$\vec{r} = 3\hat{l} - 3\hat{l} - 5\hat{k} + \mu\left(2\hat{l} + 3\hat{j} + 6\hat{k}\right)$

प्र. 4 रेखाओं $\vec{r} = \left(\hat{l} + 2\hat{j} + \hat{k}\right) + \tau\left(\hat{l} - \hat{j} + \hat{k}\right)$ और $\vec{r} = \left(2\hat{l} - \hat{j} - \hat{k}\right) + \mu\left(2\hat{l} + \hat{j} + 2\hat{k}\right)$ के मध्य की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

प्र. 5 सिद्ध कीजिए कि रेखाएं $\frac{x-4}{1} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z+1}{7}$ और $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+10}{8}$ प्रतिच्छेद करती है। इनके प्रतिच्छेद बिन्दु के निदेशांक भी ज्ञात कीजिए।

प्र. 6 बिन्दु (1, 2, 3) से रेखा $\frac{x-6}{3} = \frac{y-7}{2} = \frac{z-7}{-2}$ पर डाले गए लम्ब की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

प्र. 7 रेखाएं जिनका सदिश समीकरण निम्न है के बीच न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए –

$\vec{r} = (1-t)\hat{l} + (t-2)\hat{j} + (3-2t)\hat{k}$

$\vec{r} = (S+1)\hat{l} + (2S-1)\hat{j} - (2S+1)\hat{k}$

प्र. 8 P का मान ज्ञात कीजिए ताकि रेखाएं $\frac{1-x}{3} = \frac{7y-14}{2P} = \frac{z-3}{2}$ और $\frac{7-7x}{3P} = \frac{y-5}{1} = \frac{6-z}{5}$ परस्पर लम्बवत् हो।

11. रैखिक प्रोग्रामन

प्र. 1 निम्न रैखिक प्रोग्रामन समस्या को आलेखिय विधि द्वारा हल कीजिए –

अधिकतम $z = 10x + 30y$

व्यवरोध $x + 2y \le 20,$

$3x + 2y \le 30, \quad x \ge 0, \ y \ge 0$

प्र. 2 निम्न रैखिक प्रोग्रामन समस्या को आलेखीय विधि से हल कीजिए –

अधिकतम $z = 2x + 3y$

व्यवरोध $4x + 6y \le 60,$

तथा $2x + y \le 20, \quad x \ge 0, \ y \ge 0$

प्र. 3 निम्नलिखित व्यवरोधों के अन्तर्गत $z = 5x + 3y$ का आलेखीय विधि से अधिकतमीकरण कीजिए –

$3x + 5y \le 15, \quad 5x + 2y \le 10, \quad x \ge 0, y \ge 0$

प्र. 4 निम्नलिखित व्यवरोधों के अन्तर्गत $z = 200x + 500y$ का आलेखीय विधि से न्यूनतमीकरण कीजिए –

$x + 2y \ge 10, \quad 3x + 4y \le 24, \quad x \ge 0, y \ge 0$

12. प्रायिकता

प्र. 1 एक थैले में 3 लाल और 6 काली गेंदे है तबकि B थैले में 4 लाल और 5 काली गेंदे है। एक गेंद A थैले से B थैले में स्थानान्तरित की जाती है और तब एक गेंद को B थैले से निकाला जाता है निकाली गई गेंद लाल रंग की प्राप्त होती है इस बात की क्या प्रयिकता है कि स्थानांतरित गेंद काली है।

प्र. 2 एक व्यक्ति के बारे में ज्ञात है कि वह 3 में से 2 बार सत्य बोलता है। वह एक पासे को उछालता है और बतलाता है कि उस पर आने वाली संख्या 6 है। इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि पासे पर आने वाली संख्या वास्तव में 6 है।

प्र. 3 एक व्यक्ति के बारे में ज्ञात है कि वह 5 में से 3 बार सत्य बोलता है। वह एक पासे को उछालता है और बतलाता है कि उस पर आने वाली संख्या 1 है। इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि पासे पर आने वाली संख्या वास्तव में 1 है।

प्र. 4 एक छात्रावास में 60% विद्यार्थी हिन्दी का अखबार, 40% अंग्रेजी का अखबार और 20% दोनों हिन्दी तथा अंग्रेजी का अखबार पढ़ते हैं। एक छात्र को यादृच्छाया चुना जाता है।

(i) प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि वह न तो हिन्दी और न ही अंग्रेजी का अखबार पढ़ता है।

(ii) यदि वह हिन्दी का अखबार पढ़ता है तो अंग्रेजी का अखबार भी पढ़ने वाला होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

प्र. 5 यदि 52 पत्तों की अच्छी तरह फेंटी गई गड्डी में से एक के बाद एक–एक तीन पत्ते बिना प्रतिस्थापित किए निकाले जाते है, तो पहले दो पत्तों का इक्का होने और तीसरे पत्ते का बादशाह होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

MATHEMATICS FORMULA LIST

FOR CLASS – XII

Factoring Formules

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

Area and Volume

Circle : $C = 2\pi r = \pi D$, where C is'circumference, r is radius and D is diameter

$A = \pi r^2$, where A is the area

Triangle : $A = \frac{1}{2} bh$, where b is the base and h is the perpendicular height

$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$; where $s = \frac{a+b+c}{2}$ (Heron's Formula)

Equilateral Triangle	$A = \frac{\sqrt{3}}{4}(\text{side})^2$
Parallelogram	A = base x corresponding height
Square	$A = (\text{side})^2$; Perimeter = 4 x side
Rectangle	A = lb ; Perimeter = $2(l + b)$
Rhombus	$A = \frac{1}{2} d_1 d_2$
Trapezium :	$A = \frac{1}{2}(a + b)h$, where a and b are the lengths ofthe parallel sides and h is the perpendiuclar height

Cuboid (length = l, breadth = b, height = h

(i) V= lbh (ii) CSA = $2h(l + b)$

(iii) TSA = $2(lb + bh + lh)$ (iv) Diagonal = $\sqrt{l^2 + b^2 + h^2}$

Cube (side = a)

(i) $v = A^3$ (ii) CSA $= 4a^2$ (iii) TSA = $6a^2$ (iv) Diagonal = $\sqrt{3}$ a

Cylinger (radius = r, height = h)

(i) $V = \pi r^2 h$ (ii) CSA = $2\pi rh$ (iii) TSA = $2\pi r(r + h)$

Cone (radius = r, height = h, slant height – l)

(i) $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ (ii) CSA = πrl (iii) TSA = $\pi r(r + l)$ (iv) $l = \sqrt{r^2 + h^2}$

Sphere (radius = r)

(i) $V = \frac{2}{3}\pi r^3$ (ii) A = $4\pi r^2$

Hemi-Sphere (radius = r)

(i) $V = \frac{2}{3}\pi r^2$ (ii) CSA = $3\pi r^2$ (iii) TSA = $4\pi r^2$

Polygon

Sum of all the angles in a n-sided polygon : 180^o x (n – 2)

Each angles of a n-sided regular polygon : $\frac{180^o \times (n-2)}{n}$

Ouadratic Formula

If $ax^2 + bx + c = 0$, then $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Sum of roots = $\frac{b}{a}$; Product of roots = $\frac{c}{a}$

Logarithmic Function

$\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y$; $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$

(i) $\log_a 1 = 0$ (ii) $\log_a a = 1$

(iii) $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$

(iv) $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

(v) $\log_a x^n = n \log_a x$

(vi) $\log_a x^m = \frac{m}{n} \log_a x$

(vii) $\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$

(viii) $\log_b a = \frac{\log_x a}{\log_y b}$

(ix) If $a > 1$ then $x < y \Leftrightarrow \log_a x < \log_a y$

(x) If $0 < a < 1$ then $x < y \Leftrightarrow \log_a x > \log_a y$

Trigonometry

$180^o = \pi$ radions ; $\theta = \frac{l}{r}$, θ is measured in radians

Trigonometric Ratios of special angles

$\cos 45^o = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\cos 60^o = \frac{1}{2}$ $\cos 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin 45^o = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\sin 60^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sin 30^o = \frac{1}{2}$

$\tan 45^o = 1$ $\tan 60^o = \sqrt{3}$ $\tan 30^o = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\sin (90^o - \theta) = \cos \theta$; $\cos(90^o - \theta) = \sin \theta$

$\tan (90^o - \theta) = \cot \theta$; $\cot (90^o - \theta) = \tan \theta$

$\sec (90^o - \theta) = \text{cosec } \theta$; $\text{cosec } (90^o - \theta) = \sec \theta$

$\cos (-\theta) = \cos \theta$; $\sin (-\theta) = - \sin \theta$; $\tan(-\theta) = - \tan \theta$

$\sec\theta = \frac{1}{\cos \theta}$; $\text{cosec} = \frac{1}{\sin \theta}$; $\cot = \frac{1}{\tan \theta}$; $\tan = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$; $\cot = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$; $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$; $1 + \cot^2 \theta = \text{cosec}^2 \theta$

$-1 \le \sin x \le 1$; $-1 \le \sin x \le 1$; $-\infty < \tan x < \infty$

$\sin (A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$; $\sin (A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$

$\cos (A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$; $\cos (A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

$\tan (A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - tam\ A \tan B}$; $\tan (A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + tan\ A \tan B}$

$2 \sin A \cos B = \sin (A + B + \sin (A - B)$; $2 \cos A \sin B = \sin (A + B) - \sin (A - B)$

RCSCE राजस्थान स्कूल शिक्षा परिषद
स्कूल शिक्षा विभाग, राजस्थान सरकार

$2\cos A\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$; $2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$

$\sin A + \sin B = 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$; $\sin A - \sin B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$

$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$; $\cos A - \cos B = -2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$

$\sin 2A = 2\sin A\cos A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$

$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$

$\sin A = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2A}{2}}$; $\cos A = \sqrt{\frac{1+\cos 2A}{2}}$

$\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$; $\cos^3 A = 4\cos^3 A - 3\cos A$; $\tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^2 A}{1-3\tan^2 A}$

$\cos A\cos 2A\cos 2^2 A\cos 2^3 A \ldots \cos 2^{n-1} A = \frac{\sin 2^n A}{2^n \sin A}$

Area of triangle formula :

$= \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B$

Trigonometric Equation	Gineral Solution
(i) $\sin\theta = 0$	$\theta = n\pi,\ n \in Z$
(ii) $\cos\theta = 0$	$\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2},\ n \in Z$
(iii) $\tan\theta = 0$	$\theta = n\pi,\ n \in Z$
(iv) $\sin\theta = \sin\alpha$	$\theta = n\pi + (-1)^n\alpha,\ n \in Z$
(v) $\cos\theta = \tan\alpha$	$\theta = 2n\pi \pm \alpha,\ n \in Z$
(vi) $\tan\theta = \tan\alpha$	$\theta = n\pi + \alpha,\ n \in Z$
(vii) $\left.\begin{array}{c}\sin^2\theta = \sin^2\alpha \\ \cos^2\theta = \cos^2\alpha \\ \tan^2\theta = \tan^2\alpha\end{array}\right\}$	$\theta = n\pi \pm \alpha,\ n \in Z$

$\sin n\pi = 0$; $\cos n\pi = (-1)^n$; $\tan n\pi = 0$

RCSCE राजस्थान स्कूल शिक्षा परिषद
स्कूल शिक्षा विभाग, राजस्थान सरकार

Inverse Trigonometry

Inverse Function	Domain	Range
$\sin^{-1}$	$[-1, 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$\cos^{-1}$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$\tan^{-1}$	R	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
cosec^{-1}	$R-(-1, 1)$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]-\{0\}$
$\sec^{-1}$	$R-(-1, 1)$	$[0, \pi]-\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$
$\cot^{-1}$	R	$(0, \pi)$

$\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}(x)$ for all $x \in [-1, 1]$

$\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}(x)$ for all $x \in [-1, 1]$

$\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1}(x)$ for all $x \in R$

$\text{cosec}^{-1}(-x) = -\text{cosec}^{-1}(x)$ for all $x \in [-\infty,-1] \cup [1,\infty]$

$\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1}(x)$ for all $x \in [-\infty,-1] \cup [1, \infty]$

$\cot^{-1}(-x) = \pi - \cot^{-1}(x)$ for all $x \in R$

$\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \text{cosec}^{-1}(x)$; $\cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \sec^{-1}(x)$; $\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \cot^{-1}(x)$

$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$; $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2}$; $\sec^{-1} x + \text{cosec}^{-1} x = \frac{\pi}{2}$

$\sin^{-1} x \pm \sin^{-1} y = \sin^{-1}\left(x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2}\right)$

$\cos^{-1} x \pm \cos^{-1} y = \cos^{-1}\left(xy \mp \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right)$

$$\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \begin{cases} tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) & , \ if\ xy < 1 \\ \pi + tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) & , \ if\ xy > 1 \end{cases}$$

$$\tan^{-1} x - \tan^{-1} y = \begin{cases} tan^{-1}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right) & , \ if\ xy > 1 \\ \pi + tan^{-1}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right) & , \ if\ xy < 1 \end{cases}$$

RCSCE राजस्थान स्कूल शिक्षा परिषद
स्कूल शिक्षा विभाग, राजस्थान सरकार

$2\sin^{-1} x - \sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$; $2\cos^{-1} x = \cos^{-1}(2x^2 - 1)$

$2\tan^{-1} x - \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$

Matrices

A matric in which number of rows is equal to number of columns, say n is known as square matrix of order *n*.

Properties of Transpose of a Matrix :

(i) $(A^T)^T = A$ (ii) $(A + B)^T = A^T + B^T$ (iii) $(kA)^T = kA^T$

(iv) $(AB)^T = B^T A^T$ (v) $(ABC)^T = C^T B^T A^T$

A square matrix $A = [a_{ij}]$ is called a symmetric matrix, if $a_{ij} = a_{ji}$ for all i, j $\Leftrightarrow A^T = A$.

A square matrix $A = [a_{ij}]$ is called a skew – skew-symmetric matric, if $a_{ij} = -a_{ji}$ for all i, j $\Leftrightarrow A^T = -A$.

All main diagonal elements of a skew-symmetric matrix are zero.

Every square matrix can be uniquely expressed as the sum of symmetric and skew-symmetric matrix.

Determinants

A square matrix *A* is **a singular matrix** if |A| = 0

For any square matrix A, the |A| satisfy following properties.

(a) |AB| = |A| |B|

(b) If we interchange any two rows (or columns). then sign of determinant changes.

(c) If any two rows or any two columns are ident ical or proportional, then value or determinant is zero.

(d) If we inu ltiply each element of a row or a column of a determinant by constant *k,* then value of determinant is multiplied by *k.*

(e) Multiplying a determinant by k means multiply elements of only one row (or one column) by *k.*

(f) (Q If elements of a row or a column in a determinant can be expressed as sum of two or more elements, then the given determinant can be expressed as sum of two or more determinants.

(g) lf to each element of a row or a column of a determinant the equimultiples of corresponding elements of other rows or columns are added, then value of determinant remains same.

Adjoint of a matrix *A* is the transpose of a cofactor matrix.

If *A* and *B* are square matrices of the same order *n,* then:

(a) $A (adj A) = |A| I_n = (adj A) A$ (b) $adj (AB) = (adj B) (adj A)$

(c) $adj (A)^T = (adj A)^T$ (c) $|adj A| = |A|^{n-1}$

(e) $adj (adj A) = |A|^{n-2} A$ (f) $adj (adj A) = |A^{|(n-1)^2}$

A square matrix fi of order o is **invertible** if there exists a square matrix B of the same order such that $AB = In = BA$. We write, $A^{-1} = B$

Properties of inverse of a matrix:

(a) Every invertible matrix possesses a unique inverse.

(b) $(A^{-1})^{-1} = A$ (c) $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ (d) $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

(e) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ (f) $A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj (A)$

A system AX = B of linear equations has a unique sofur ion givein by $X = A^{-1} B$, if $|A| \neq 0$

If |A| = 0 and (*adj A*) *B* = 0, then the system is consistent and has infinitely many solutions.

|A| = 0 and (*adj A*) *B r* 0, then the system is inconsistent.

Continuity and Differentiability

Limits

$\lim_{x \to 0} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$; $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$

$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$; $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$; $\lim_{x \to 0} \frac{\log (1+x)}{x} = 1$

A function *f(x)* is continuons at *x* = a if $\lim_{x \to 0}$ f(*x*) = f(a) i.e. $\lim_{x \to 0}$ f(*x*) = time f(*x*) = f(a).

Following functions are continuous everywhere:

(a) Constant function (b) Identity function

(c) Polynomial function (d) Modulus function

(e) Exponential function (f) Sine & Cosine functions

Following functions are continuous in their domains:

(a) Logarithmic function (b) Rational function

(c) Tan, Cot, Sec & Cosec functions (d) all"inverse trigonometric functions

If f is continuous function then $|f|$ and $\frac{1}{f}$ are continuous in their domains.

A function f(x) is differentiable at x = a if $\lim_{x \to 0} \frac{f(a-h)-f(a)}{-h}$ exists finitely i.e

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(a-h)-f(a)}{h} = \lim_{x \to 0} \frac{f(a-h)-f(a)}{-h}$$

Every differentiable function is continuous but, converse is not true.

Following functions are differentiable everywhere/their defned domaih:

(a) Polynomial function (b) Exponential function

(c) Constant function (d) Logarithmic function

(e) Trigonometric & inverse tr gonometric functions

The sum, difference, product, quotient and compostion of two differentiable fiinctions is differentiable.

Some Standard Derivatives:

(i) $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ (ii) $\frac{d}{dx}(log_e x) = \frac{1}{x}$

(iii) $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$ (iv) $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \, log_e a$

(v) $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ (vi) $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

(vii) $\frac{d}{dx}(\tan x) = sec^2 x$ (viii) $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\cos ec^2 \, x$

(ix) $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$ (x) $\frac{d}{dx}(\cos ecx) = -\cos ecx \cot x$

(xi) $\frac{d}{dx}(sin^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (xii) $\frac{d}{dx}(cos^{-1}x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(xiii) $\frac{d}{dx}(tan^{-1}x) = \frac{1}{1+x^2}$ (xiv) $\frac{d}{dx}(cot^{-1}x) = -\frac{1}{1+x^2}$

(xv) $\frac{d}{dx}(sec^{-1}x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ (xvi) $\frac{d}{dx}(cosec^{-1}x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

Following are some substitutions useful in finding derivatives:

Expression	Substitution
$a^2 + x^2$	$x = a \tan\theta$ or $a \cot\theta$
$1 + x^2$	$x = \tan\theta$ or $\cot\theta$
$a^2 - x^2$	$x = a \sin\theta$ or $a \cos\theta$
$1 - x^2$	$x = \sin\theta$ or $\cos\theta$
$x^2 - a^2$	$x = a \sec\theta$ or a cosec θ
$x^2 - 1$	$x = \sec\theta$ or cosec θ
$\frac{a-x}{a+x}$; $\frac{a+x}{a-x}$ $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$; $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$	$x = a\cos 2\theta$

Chain rule :

If $z = f(y)$ and $y = g(x)$, then $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$

Product rule :

$y = uv$, then $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx}$

Quotient rule :

if $y = \frac{u}{v}$, then $y = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}v - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

If $x = f(t)$ and $y = g(t)$, then $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{g'(t)}{f'(t)}\right\} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{f'(t)g''(t) - g'(t)f''(t)}{\{f'(t)\}^3}$

Applicatoins of Derivatives

Rolle's Theorem:

Let f be real valued function defined on [a,b] such that:

(a) continuous on [a,b] (b) differentiable on (a,b) (c) $f(a) = f(b)$

then, there exist a real number c $\in$ (a, b) such that $f'(c) = 0$

Mean Value Theorem:

Let f be a real valued function defined on [a,b] such that:

(a) continuous on [a,b] (b) differentiable on (a,b)

then, there exist a real number c $\in$ (a,b) such that $f(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Tangents and Normals

If $y = f(x)$, then $\left(\frac{dy}{dx}\right)_p$ is slope of tangent to $y = f(x)$ at a point P.

If $y = f(x)$, then $-\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_p}$ is slope of normal to $y = f(x)$ at a point P.

If tangent is parallel to x-axis, then $\frac{dy}{dx} = 0$; If tangent is parallel to y-axis, then $\frac{dx}{dy} = 0$

If $p(x_1, y_1)$ is point on the curve $y = f(x)$, then:

Equation of tangent at P is $y - y_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_p (x - x_1)$

Equation of tangent at P is $y - y_1 = -\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_p} (x - x_1)$

The angle between the tangents to two given curves at their point of intersection is defined as the angle of intersection of two curves.

Approximations:

Let $y = f(x)$, Δx be a small increment in x and Δy be the increment in y corresponding to the increment in x, i.e., $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Then $\Delta y = \frac{dy}{dx}\Delta x$

Also, $f(x + \Delta x) = f(x) + f(x)\,\Delta x$

Increasing and Decreasing Function

A function f is said to be:

(a) **Increasing** on (a, b) if $x_1 < x_2$ in (a, b) $\Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$ for all $x_1, x_2 \in$ (a, b).

Alternatively, $f(x) \ge 0$ for each x in (a, b)

(b) **Decreasing** on (a, b) if $x_1 < x_2$ in (a, b) $\Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$ for all $x_1, x_2 \in$ (a, b).

Alternatively, $f(x) \le 0$ for each x in (a, b)

(c) **Strictly increasing** on (a, b) if

$x_1 < x_2$ in (a, b) $\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ for all $x_1, x_2 \in$ (a, b). Alternatively,

$f(x) > 0$ for each x in (a, b).

(d) **Strictly decreasing** on (a, b) if

$x_1 < x_2$ in (a, b) $\Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ for all $x_1, x_2 \in$ (a, b). Alternatively,

$f(x) < 0$ for each x in (a, b).

A function *f* in **monotonic** on (a, b) if it is strictly increasing or strictly decreasing on (a, b).

A point *c* in the domain of a function *f* at which either *f* (*c*) = 0 of f is not differentiable is called a **critical point**.

Maxima and Minima

First Derivative Test:

Given a curve y = f (*x*),

(a) For the stationary point at *x* = a,

(i) if $\frac{dy}{dx}$ changes sign from **negative** to **positive** as *x* increases through a, the point s is a minimum point,

(ii) if $\frac{dy}{dx}$ changes sign from **positive** to **negative** as *x* increases through a, the point s is a minimum point,

(iii) if $\frac{dy}{dx}$ dones not change sign as x increases through a, the point S is a point of inflextion.

(b) A stationary point is called a turning point if it is either a maxiumu point or a minimum point.

Second Derivative Test:

Given a curve y = f (*x*),

(a) $\frac{dy}{dx} = 0$ and $\frac{d^2y}{dx^2} \neq 0$ at $x = a \Rightarrow$ S(a, f(a)) is a turning point.

(i) If $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$, then S is a **minimum** point.

(ii) If $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$, then S is a **maximum** point.

(b) $\frac{dy}{dx} = 0$ and $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ at $x = a$, go back to First Derivative Test.

Working rule for finding **absolute maxima and/ or absolute minima:**

Step 1: Find all crtical points of *f* in the given interval.

Step 2: Take end points of the interval.

Step 3: At all these points (listed in step 1 and 2), calculate the values of *f*.

Step 4: Identify the maximum and minimum values of *f* out of values calculated in step 3.

Integrals

(i) $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \; ; n \neq -1$

(ii) $\int \frac{1}{x} dx = \log, x + c$

(iii) $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\log_e a} + c$

(iv) $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + c$

(v) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + c$

(vi) $\int \sqrt{x} \, dx = \frac{2}{3} x^{3/2} + c$

(vii) $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$

(viii) $\int \cos x \, dx = \sin x + c$

(ix) $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$

(x) $\int \cos ec^2 x \, dx = -\cot x + c$

(xi) $\int \sec \tan x \, dx = \sec x + c$

(xii) $\int \cos ecx \cot x \, dx = -\cos ecx + c$

(xiii) $\int \tan x \, dx = \log |\sec x| + c$

(xiv) $\int \cot x \, dx = \log |\sin x| + c$

(xv) $\int \sec x \, dx = \log |\sec x + \tan x| + c = \log \left| \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| + c$

(xvi) $\int \cos ec \, x \, dx = \log |\operatorname{cosec} x - \cot x| + c = \log \left| \tan \left(\frac{x}{2} \right) \right| + c$

(xvii) $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c$

(xviii) $\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + c$

(xix) $\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \log \left(\frac{x}{a} \right) + c$

(xx) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \frac{1}{2a} \log \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + c$

(xxi) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \sin^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + c$

(xxii) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \log \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + c$

(xxiii) $\int \sqrt{x^2 - a^2} \, dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \log \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + c$

(xxiv) $\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + c$

(xxv) $\int \sqrt{x^2 + a^2} \, dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \log \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + c$

(xxvi) If u and v are tow function of x, then $\int uv \, dx = u \int v dx - \int \left\{ \frac{du}{dx} \int v dx \right\} dx$

i.e. (first function) x (integral of second function)-integral of {(derivative of first function) x (integral of second function)}

We can choose the first functions as the function which comes first in the word ILATE, where I stands for inverse trigonometric functions, L for logarithmic functions, A for algebraic functions, T for trigonometric functions and E for exponential function.

(xxvii) $\int [f(x) + f'(x)]e^x\, dx = e^x f(x) + c$

Integration by Partial fraction of Rational Function of the form $\frac{P(x)}{Q(x)}$:

If degree of $P(x) \geq$ degree of $Q(x)$, then divide $P(x)$ by $Q(x)$

Form		**Partial Fraction**
(i)	$\frac{Px+q}{(x-a)(x-b)}$	$\frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-b)}$
(ii)	$\frac{Px+q}{(x-a)^2}$	$\frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-a)^2}$
(iii)	$\frac{Px^2+qx+r}{(x-a)(x-b)(x-c)}$	$\frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-b)} + \frac{C}{(x-c)}$
(iv)	$\frac{Px^2+qx+r}{(x-a)^2(x-b)}$	$\frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{(x-b)}$
(v)	$\frac{Px^2+qx+r}{(x-a)(x^2+bx+c)}$	$\frac{A}{(x-a)} + \frac{Bx+C}{x^2+bc+c}$ here, $x^2 + bx + c$ can't be factorise.

For Integrals of the form $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ or $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ use completing the square method and then applying formulas *xvi* to *xxi*.

For Integrals of the form $\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c} dx$ or $\int \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$ or $\int \sqrt{ax^2 + bx + c}\ dx$

write $px + q = A \frac{d}{dx}(ax^2 + bx + c) + B$ where A and B are determined by comparing coefficients on both sidese.

For Integrals of the form $\int \frac{1}{a+b\sin^2 x} dx$ or $\int \frac{1}{a+b\cos^2 x} dx$ or $\int \frac{1}{a\sin^2 x+b\cos^2 x} dx$ or $\int \frac{1}{(a+\sin + b\cos x)^2} dx$ or $\int \frac{1}{a+b\sin 2x} dx$ or $\int \frac{1}{a+b\cos 2x} dx$

Algorithm:

Step 1: Divide numerator and denominator by $\cos^2 x$

Step 2: Replace $\sec^2 x$, if any, in denominator by $1+\tan^2 x$

Step 3: Put $\tan x = t$ so that $\sec^2 x dx = dt$. This will reduce the integral in form $\int \frac{1}{at^2+bt+c} dx$

Step 4: Evaluate the integral now using completing the square method.

For Integrals of the form $\int \frac{1}{a+b\sin x}\,dx$ or $\int \frac{1}{a+b\cos x}\,dx$ or $\int \frac{1}{a\sin x+b\cos x}\,dx$

Algorithm:

Put $\sin x = \frac{2\tan x/2}{1+tan^2\, x/2}$, $\cos x = \frac{1-tan^2\, x/2}{1+tan^2\, x/2}$

For Integrals of the form $\int \frac{a\sin x+b\cos x}{c\sin x+d\cos x}\,dx$

Algorithm:

Put Numerator = A(Denominator) + B (Derivative of Denominator)

For Integrals of the form $\int \frac{x^2\pm 1}{x^4+\lambda x^2+1}\,dx$ or $\int \frac{1}{x^4+\lambda x^2+1}\,dx$ or $\int \sqrt{\tan x}\,dx$ or $\int \sqrt{\cot x}\,dx$

Algorithm:

Step 1: Divide numerator and denominator by x^2.

Step 2: Express the denominator in the form $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 \pm k^2$

Step 3: Introduce $d\left(x+\frac{1}{x}\right)$ or $d\left(x-\frac{1}{x}\right)$ in the numerator.

Step 4: Substitute $x+\frac{1}{x}=t$ or $x-x-\frac{1}{x}=t$ as the case may be.

First fundamental theorem of intergral calculus:

Let the area function be defined by A(x) = $\int_a^x f(x)dx$ for all $x \geq a$ where the function f is assumed to be continuous on [a,b]. Then $A'(x) = f(x)$ for all $x \in$ [a,b]

Second fundamental theorem of integral calculus:

Let f be continuous function of x defined on the closed interval [a, b] and let F be another function such that $\frac{d}{dx}$ F (x) = $f(x)$ for all x in the domain of f, then $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Properties of Definite Integral

(i) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)\,dt$ (ii) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

(iii) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)\,dx$ where $a < c < b$

(iv) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$ (v) $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$

(vi) $\int_{-a}^a f(x)dx = \begin{cases} 2\int_a^b f(x)\,dx & \text{if } f(-x) = f(x)\ i.e.\ f \text{ is even function} \\ 0 & \text{if } f(-x) = -f(x)\ i.e.\ f \text{ is odd function} \end{cases}$

(vii) $\int_0^{2a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx & \text{if } f(2a-x) = f(x) \\ 0 & \text{if } f(2a-x) = -f(x) \end{cases}$

Limit as a Sum

$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h \to 0} h[f(a) + f(a+h) + fa+2h) + \cdots + f(a+(n-1)h]$ where nh = b – a

Also,

(i) $1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$ (ii) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$

(iii) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 = \lim_{x \to 0} \frac{x}{e^x - 1}$ (iv) $a + ar + ar^2 + \ldots ar^{n-1} = a\left(\frac{r^n - 1}{r-1}\right)$

मॉडल पेपर – प्रथम

विषय–गणित (Mathematics)

कक्षा–12

समय : 3 घण्टे 15 मिनट | पूर्णांक : 80 अंक

परीक्षार्थियों के लिए सामान्य निर्देश :–

GENERAL INSTRUCTION TO THE EXAMINEES;

1 परीक्षार्थी सर्वप्रथम अपने प्रश्न पत्र पर नामांक अनिवार्यतः लिखें।

Candidate must write first his/her Roll No. on the question paper compulsorily.

2 सभी प्रश्न करने अनिवार्य है।

All the questions are compulasory.

3 प्रश्न पत्र के हिन्दी पर अंग्रेजी रूपान्तरण में किसी भी त्रुटि/अन्तर/विरोधाभास होने पर हिन्दी भाषा के प्रश्न को सही मानें।

If There is any error/difference/contradiction in Hindi & English version of the question paper, the question of the Hindi version should be treated valid.

खण्ड (अ)

1. बहुविकल्पीय प्रश्न –

(i) समुच्चय N में सम्बन्ध R निम्नवत परिभाषित है–

$$R = \{(a, b): a = b - 2, b > 6\}$$

तब निम्नलिखित में से कौन सही है?

(अ) $(2, 4) \in R$ (ब) $(3, 8) \in R$ (स) $(6, 8) \in R$ (द) $(8, 7) \in R$ ( )

Relation R is defined is set N as following

$$R = \{(a, b) : a = b - 2, b > 6)$$

then, which of the following is correct.

(a) $(2, 4) \in R$ (b) $(3, 8) \in R$ (c) $(6, 8) \in R$ (d) $(8, 7) \in R$ ( )

(ii) यदि आव्यूह A और B के क्रम क्रमशः $m \times n$ तथा $n \times p$ हैं तो AB का क्रम है–

(अ) $p \times m$ (ब) $n \times m$ (स) $n \times p$ (द) $m \times n$ ( )

RCSCE राजस्थान स्कूल शिक्षा परिषद
स्कूल शिक्षा विभाग, राजस्थान सरकार

If matrix A and B are of the order m x n and n x p repectively, then order of AB is-

(a) p x m (b) n x m (c) n x p (d) m x n ( )

(iii) निम्न फलनों में असत्त फलन है–

(अ) $\sin x$ (ब) x^2 (स) $\frac{1}{1-2x}$ (द) $\frac{1}{1+x^2}$ ( )

Which of the following functions is discontinuous function.

(a) $\sin x$ (b) x^2 (c) $\frac{1}{1-2x}$ (d) $\frac{1}{1+x^2}$ ( )

(iv) $\int \sin 3x\, dx$ का मान होगा–

(अ) $\frac{1}{3}\cos 3x + c$ (ब) $\frac{1}{3}\sin 3x + c$ (स) $-\frac{1}{3}\cos 3x + c$ (द) $-\cos 3x + c$ ( )

Solution of $\int \sin 3x\, dx$

(a) $\frac{1}{3}\cos 3x + c$ (b) $\frac{1}{3}\sin 3x + c$ (c) $-\frac{1}{3}\cos 3x + c$ (d) $-\cos 3x + c$ ( )

(v) $\int x \sin x\, dx$ का मान होगा–

(अ) $x \sin x + \cos x + c$ (ब) $-x \cos x + \sin x + c$

(स) $x \sin x - 6 \cos x + c$ (द) $x \cos x + \sin x + c$ ( )

Solution of $\int x \sin x\, dx$

(a) $x \sin x + \cos x + c$ (b) $-x \cos x + \sin x + c$

(c) $x \sin x - 6 \cos x + c$ (d) $x \cos x + \sin x + c$ ( )

(vi) वक्र $y^2 = 4x$, y– अक्ष तथा रेखा $y = 3$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है–

(अ) 2 (ब) $\frac{9}{4}$ (स) $\frac{9}{3}$ (द) $\frac{9}{2}$ ( )

Area of the bounded by curve $y^2 = 4x$, y-axis and line $y = 3$ is-

(a) 2 (b) $\frac{9}{4}$ (c) $\frac{9}{3}$ (d) $\frac{9}{2}$ ( )

(vii) व्यंजक $\hat{\imath} \cdot \hat{\imath} - \hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath} + \hat{k} \cdot \hat{k}$ का मान है–

(अ) 0 (ब) 1 (स) 2 (द) 3 ( )

RCSCE राजस्थान स्कूल शिक्षा परिषद
स्कूल शिक्षा विभाग, राजस्थान सरकार

The value of $\hat{\imath} \cdot \hat{\imath} - \hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath} + \hat{k} \cdot \hat{k}$ is –

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 ( )

(viii) सदिशों $\bar{a}$ x $\bar{b}$ तथा $\bar{b}$ x $\bar{a}$ के बीच का कोण है–

(अ) 0^o (ब) 90^o (स) 135^o (द) 180^o ( )

The angle between vectors $\bar{a}$ x $\bar{b}$ or $\bar{b}$ x $\bar{a}$ is-

(a) 0^o (b) 90^o (c) 135^o (d) 180^o ( )

(ix) बिन्दु (α, β, γ) की y अक्ष से दूरी है–

(अ) α (ब) β (स) γ (द) $\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}$ ( )

The distance of point (α, β, γ) from y-asix is-

(a) α (b) β (c) γ (d) $\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}$ ( )

(x) यदि $P(A) = \left(\frac{3}{10}\right), P(B) = \left(\frac{2}{5}\right)$ तथा $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$, तो $P\left(\frac{B}{A}\right) + P\left(\frac{A}{B}\right)$ के बराबर है–

(अ) $\frac{1}{4}$ (ब) $\frac{1}{3}$ (स) $\frac{5}{12}$ (द) $\frac{7}{12}$ ( )

If $P(A) = \left(\frac{3}{10}\right), P(B) = \left(\frac{2}{5}\right)$ *and* $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$, *then* $P\left(\frac{B}{A}\right) + P\left(\frac{A}{B}\right)$ *is equal to* –

(a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{5}{12}$ (d) $\frac{7}{12}$ ( )

(xi) A व B दो घटनाएँ है कि $P(A/B) = P(B/A) \neq 0$, तब निम्न में से घटनाओं के बारे में सही चयन कीजिए–

(अ) $A \subset B$ (ब) $A = B$ (स) $A \cap B = \phi$ (द) $P(A) = P(B)$ ( )

A and B be two events such that $P(A/B) = P(B/A) \neq 0$, then which of the following correct-

(a) $A \subset B$ (b) $A = B$ (c) $A \cap B = \phi$ (d) $P(A) = P(B)$ ( )

(xii) यदि P(E) = 0.35 और P(E ∪F)=0.6 है तथा E व F स्वतंत्र घटनाएँ हैं, तब P(F) का मान है–

(अ) $\frac{5}{13}$ (ब) $\frac{7}{13}$ (स) $\frac{9}{13}$ (द) $\frac{11}{13}$ ( )

If P(E) = 0.35 and P(E ∪F)=0.6 and E, F are independent events, then, E(F) is equal to-

(a) $\frac{5}{13}$ (b) $\frac{7}{13}$ (c) $\frac{9}{13}$ (d) $\frac{11}{13}$ ( )

2 रिक्त स्थान की पूर्ति करों –

(i) आव्यूह $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ का योज्य प्रतिलोम ..... है।

Additive inverse of matrix $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ is ..... .

(ii) $x = 4$ पर $\sqrt{x^{-3}}$ का अवकलज ..... है।

Derivative of $\sqrt{x^{-3}}$ at $x = 4$ is ..... .

(iii) एक वृत्त की त्रिज्या में 0.7 सेमी/सेकण्ड की दर से वृद्धि हो रही है, तब वृत्त की परिधि में परिवर्तन की दर ..... होगी।

If the radius of a circle is increasing by 0.7 cm/sec, then rate of changed circumference of circle will be ..... .

(iv) $\int(3x^2 + 4x^3)dx$ का मान ..... होगा।

The value of $\int(3x^2 + 4x^3)dx$ will be ..... .

(v) यदि एक रेखा की दिक् कोज्याएँ k, k, k हैं तो k =..... होगा।

If Dc's of aline are k, k, k then k will be .....

(vi) यदि $2P(A) = P(B) = \frac{5}{12}$ व $P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{1}{5}$ है, तब $P(A \cup B)$ = ... होगा।

If $2P(A) = P(B) = \frac{5}{12}$ and $P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{1}{5}$, then $P(A \cup B)$ will be .....

3 अति लघुउत्तरीय प्रश्न

(i) $\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ का मुख्य मान ज्ञात कीजिए।

Find the principal is $\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

(ii) यदि $x + y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ तथा $2x - y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

If $x + y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ and $2x - y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ then find x.

(iii) यदि बिन्दु $A(m, -1), B(2, 1)$ तथा $C(4, 5)$ सरेखीय हों, तो m का मान ज्ञात कीजिए।

If points $A(m, -1), B(2, 1)$ and $C(4, 5)$ are collinear, then find m.

(iv) यदि फलन $F(x) = \sin\frac{(10x)}{x}$, $x \neq 0$, $x = 0$ पर सतत् है, तो F(0) का मान ज्ञात कीजिए।

If function $F(x) = \sin\frac{(10x)}{x}$, $x \neq 0$, is continuous at $x = 0$ then find F(0).

(v) दिखाइए कि फलन $f(x) = 7x^2-3$, $x > 0$ पर एक वर्धमान फलन है।

Show that function $f(x) = 7x^2-3$, $x > 0$ is a increasing function.

(vi) वृत्त $x^2 + y^2 = 1$ के एक चतुर्थांश पर क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Find the area of one quadrant of a circle $x^2 + y^2 = 1$.

(vii) सदिशों AB, BC, CD तथा DA का योगफल ज्ञात कीजिए, जहाँ ABCD एक चतुर्भुज है।

Find the sum of vectors AB, BC, CD and DA, where ABCD is a quadrilateral.

(viii) सदिश $\vec{a} = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}, \vec{b} = -2\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 5\hat{k}$, और $\vec{c} = \hat{\imath} + b\hat{\jmath} + 7\hat{k}$ का योगफल ज्ञात कीजिए।

If vectors then find the sum of all vectors.

(ix) उन रेखाओं के बीच का कोण ज्ञात कीजिए दिक् अनुपात 4, –3, 5 तथा 3, 4, 5 हैं।

Find the angle between lines whose direction ratios are 4, –3, 5 and 3, 4, 5.

(x) बिन्दुओं P(1, –3, 4) तथा Q(–4, 1,2) के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

Find the distance between points P(1, -3, 4) and Q(-4, 1,2).

(xi) x, y और z की दिक्–कोज्याएँ ज्ञात कीजिए।

Find the direction cosines of x, y and z-asix.

(xii) यदि दो घटनाएँ A तथा B ऐसी हैं कि $P(A) = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{1}{2}$ और $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$, तो $P(A' \cap B')$ ज्ञात कीजिए।

If two events A and B are such that $P(A) = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{1}{2}$ and $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$, then find out $P(A' \cap B')$.

RCSCE राजस्थान स्कूल शिक्षा परिषद
स्कूल शिक्षा विभाग, राजस्थान सरकार

खण्ड (ब)

लघु उत्तरीय प्रश्न –

1. यदि A = {1, 2} तथा B = {3, 4} है, तो A और B में सम्बन्धों की संख्या ज्ञात कीजिए।

   If A = {1, 2} and B = {3, 4} then find the number of relations in A and B.

2. $\begin{bmatrix} x+y & 2 \\ 5+x & xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ में x, y, z का मान ज्ञात कीजिए।

   Find x, y, z in $\begin{bmatrix} x+y & 2 \\ 5+x & xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$.

3. सिद्ध कीजिए कि $\begin{bmatrix} a & c & a+c \\ a+b & b & a \\ b & b+c & c \end{bmatrix} = 3abc$

   Prove that $\begin{bmatrix} a & c & a+c \\ a+b & b & a \\ b & b+c & c \end{bmatrix} = 3abc$

4. आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ का सहखण्डज आव्यूह ज्ञात कीजिए।

   Find the adjoint matrix matrix $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

5. दिखाएइ कि फलन $F(x) = \frac{1}{(x-a)}$ बिन्दु $x = a$ पर असतत् है।

   Show that the function $F(x) = \frac{1}{(x-a)}$ is not continuous at $x = a$.

6. ज्ञात कीजिए कि किस अन्तराल में $y = x^2e^{-x}$ वर्ध्रमान है?

   Fine the interval in which functions $y = x^2e^{-x}$ in increasing.

7. $\sin\theta + \cos\theta$ का महत्तम मान ज्ञात कीजिए।

   Find the maximum value of $\sin\theta + \cos\theta$.

8. $\int \frac{x\,tan^{-1}x}{(1+x^2)^{3/2}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

   Find the value of $\int \frac{x\,tan^{-1}x}{(1+x^2)^{3/2}}$

9. दो परवलयों $y = x^2$ तथा $x = y^2$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

   Find the Common area between two parabolas $y = x^2$ and $x = y^2$.

10. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{x(2\cos x+1)}{\sin y + y\cos y}$ को हल कीजिए।

Solve the differential equation $\frac{dy}{dx} = \frac{x(2\cos x+1)}{\sin y + y\cos y}$.

11. सदिश $\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 2\hat{k}$ के अनुदिश इकाई सदिश ज्ञात कीजिए।

Find the unit vector along vector $\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 2\hat{k}$.

12. दर्शाइए कि बिन्दु $2\hat{\imath}, -\hat{\imath} - 4\hat{\jmath}, \hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$ एक समद्विबाहु त्रिभुज बनाते हैं।

Show that the point $2\hat{\imath}, -\hat{\imath} - 4\hat{\jmath}, \hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$ represent an isosceles triangle.

13 सिद्ध कीजिए कि यदि A व B दो स्वतंत्र घटनाएँ हैं, तो A' तथा B' भी स्वतंत्र होंगे।

Prove that if A and B are two independent events, then A' and B' will also be independent.

खण्ड (स)

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न –

1. $\tan^{-1}(1) + \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ को हल कीजिए

अथवा

सिद्ध कीजिए– $\tan^{-1}\left(\frac{63}{16}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{5}{13}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$

Solve the following : $\tan^{-1}(1) + \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

or

Prove that – $\tan^{-1}(1) + \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

2. यदि फलन $F(x)=\begin{cases} kx+1, x \le \pi \\ \cos x, x > \pi \end{cases}$ $x = \pi$ पर सतत् है तो k का मान ज्ञात कीजिए।

अथवा

यदि $y = \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)(x-5)}}$ हो, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

If function $F(x)=\begin{cases} kx+l, & x \le \pi \\ \cos x, & x > \pi \end{cases}$ is continuous at $x = \pi$, then find k.

or

Find $\frac{dy}{dx}$, if y = $\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)(x-5)}}$.

3. समाकल $\int \frac{dx}{1+\cos x+\sin x}$ का मान ज्ञात कीजिए।

Find the integral : $\int \frac{dx}{1+\cos x+\sin x}$.

अथवा

सिद्ध कीजिए कि $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx = \frac{\pi}{4}$

or

Prove that $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx = \frac{\pi}{4}$

4. सदिश $5\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 2\hat{k}$ के अनुदिश एक ऐसा सदिश ज्ञात कीजिए जिसका परिमाण 8 इकाई है।

अथवा

D, E तथा F, ΔABC की भुजाओं के मध्यबिन्दु हैं। यदि O कोई बिन्दु है, तो सिद्ध कीजिए कि

$\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=\overline{OD}+\overline{OE}+\overline{OF}$

Fine the vector along vector $5\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 2\hat{k}$ whose magnitude is 8 units.

or

D, E and F are mid points of side of triangle ABC. If 'O' be any point, then prove that

$\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=\overline{OD}+\overline{OE}+\overline{OF}$

खण्ड (द)

निबन्धात्मक प्रश्न –

1. $\int \frac{x^2}{x^6+x^3} dx$ का समाकलन कीजिए।

अथवा

सिद्ध कीजिए $\int_a^b (a+b-x)\, dx = \int_a^b f(x)dx$ और इसका प्रयोग करके $\int_4^9 \frac{f(x)}{f(x)+f(13-x)} dx$

ज्ञात कीजिए।

Find $\int \frac{x^2}{x^6+x^3}\,dx$

or

Prove that $\int_a^b (a+b-x)\,dx = \int_a^b f(x)dx$ and find $\int_4^9 \frac{f(x)}{f(x)+f(13-x)}\,dx$ using this.

2. अवकल समीकरण $(x+y)\,dy + (x-y)\,dx = 0$ को हल कीजिए। दिया है : $y = 1$ जब $x = 1$

अथवा

अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + y\tan x = y^2 \sec x$ को हल कीजिए।

Solve the differential equation $(x+y)\,dy + (x-y)\,dx = 0$, given : $y = 1$ when $x = 1$

or

Solve the differential equation $\frac{dy}{dx} + y\tan x = y^2 \sec x$.

3. निम्नलिखित व्यवरोधों के अन्तर्गत $Z = 3x + 2y$ का आलेखीय विधि से अधिकतमीकरण कीजिए–

$5x + 2y \le 10$, $3x + 5y \le 15$; $x \ge 0$, $y \ge 0$

अथवा

निम्नलिखि व्यवरोधों के अन्तर्गत $Z = x + 2y$ का रैखिक प्रोग्रामन के ग्राफीय विधि द्वारा न्यूनतमीकरण कीजिए–

$2x + y \ge 3$, $x + 2y \ge 6$; $x, y \ge 0$

Maximize $Z = 3x + 2y$ subject to constraints $5x + 2y \le 10$, $3x + 5y \le 15$; $x \ge 0$, $y \ge 0$ by using graphical method.

or

Minimize $Z = x + 2y$ subject to constraints $2x + y \ge 3$, $x + 2y \ge 6$; $x, y \ge 0$ by using graphical method.

मॉडल पेपर – द्वितीय
विषय–गणित (Mathematics)
कक्षा–12वीं

समय : 3 घण्टे 15 मिनट | पूर्णांक : 80 अंक

परीक्षार्थियों के लिए सामान्य निर्देशः–

GENERAL INSTRUCTION TO THE EXAMINEES;

1. परीक्षार्थी सर्वप्रथम अपने प्रश्न पत्र पर नामांक अनिवार्यतः लिखें।
   Candidate must write first his/her Roll No. on the question paper compulsorily.
2. सभी प्रश्न करने अनिवार्य है।
   All the questions are compulasory.
3. प्रश्न पत्र के हिन्दी पर अंग्रेजी रूपान्तरण में किसी भी त्रुटि/अन्तर/विरोधाभास होने पर हिन्दी भाषा के प्रश्न को सही मानें।
   If there is any error/difference/contradiction in Hindi & English version of the question paper, the question of the Hindi version should be treated valid.

बहुविकल्पीय प्रश्न –

(i) मान लीजिये कि $f : R \to R$, $f(x) = (x)^3$ द्वारा परिभाषित है तो सही विकल्प का चयन कीजिये।

(अ) f एकैकी आच्छादक है

(ब) f बहुएकी आच्छादक है

(स) f एकैकी है पर आच्छादक नहीं है

(द) f न तो एकैकी है और ना ही ही आच्छादक है ( )

Let $f : R \to R$, be defined as $f(x) = (x)^3$ chose the correct answer

(a) f is one – one onto (b) f is many – one onto

(c) f is one – one but not onto (d) f is neither one one nor onto ( )

(ii) $\sin\{\frac{\pi}{3} - \sin^{-1}(-\frac{1}{2})\}$ का मान है –

(अ) $\frac{1}{2}$ (ब) $\frac{1}{3}$ (स) $\frac{1}{4}$ (द) 1 ( )

$\sin\{\frac{\pi}{3} - \sin^{-1}(-\frac{1}{2})\}$ is equal to –

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) 1 ( )

RCSCE राजस्थान स्कूल शिक्षा परिषद
स्कूल शिक्षा विभाग, राजस्थान सरकार

(iii) मान लीजिए कि x, y, z, w तथा P क्रमशः 2 x n, 3 x k, 2 x p, n x 3 तथा p x k कोटियों के आव्यूह है। यदि n = p तो आव्यूह $7x - 5Z$ की कोटि है –

(अ) p x 2 (ब) 2 x n (स) n x 3 (द) p x n ( )

Assume x, y, z, w and p are matrix of order 2 x n, 3 x k, 2 x p, n x 3 and p x k respectively if n = p then the order of the matix $7x - 5z$ is.

(a) p x 2 (b) 2 x n (c) n x 3 (d) p x n ( )

(iv) यदि $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 18 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 18 & 6 \end{vmatrix}$ तो X बराबर है –

(अ) 6 (ब) ± 1 (स) -6 (द) 0 ( )

If $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 18 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 18 & 6 \end{vmatrix}$ then x is equal to -

(a) 6 (b) ± 1 (c) -6 (d) 0 ( )

(v) फलन cos(sin$x$) का अवकलज है –

(अ) sin (sin$x$) (ब) sin (cos$x$) (स) –sin (sin$x$) (द) –cos$x$ sin (sin$x$) ( )

The derivative of function cos (sin$x$) is –

(a) sin (sin$x$) (b) sin (cos$x$) (c) –sin (sin$x$) (d) –cos$x$ sin (sin$x$) ( )

(vi) एक वृत की त्रिज्या r = 6cm, पर r के सापेक्ष क्षेत्रफल में परिवर्तन की दर है–

(अ) 10π (ब) 12π (स) 11π (द) 8π ( )

The rate of change of the area of a circle with respect to it's radious r at r = 6cm is -

(a) 10π (b) 12π (c) 11π (d) 8π ( )

(vii) $\int \log x \, dx$ का मान है –

(अ) log$x$ – x + c (ब) 1 + log$x$ + c (स) x (log$x$ –1) + c (द) x (log x + 1) + c ( )

The value of $\int \log x \, dx$ –

(a) log$x$ – x + c (b) 1 + log$x$ + c (c) x(log$x$ – 1) + c (d) x (log$x$ + 1) + c ( )

(viii) अवकल समीकरण $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = a \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ की घात है –

(अ) 1 (ब) 2 (स) 3 (द) 4 ( )

The order of differential equation $\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = a\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 ( )

(ix) मान लीजिये के दो सदिश $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ इस प्रकार हैं कि $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = \frac{\sqrt{2}}{3}$ तब $\vec{a} \times \vec{b}$ एक मात्रक सदिश यदि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के मध्य कोण है–

(अ) $\frac{\pi}{6}$ (ब) $\frac{\pi}{2}$ (स) $\frac{\pi}{4}$ (द) $\frac{\pi}{3}$ ( )

Let the vector $\vec{a}$ and $\vec{b}$ be such that $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = \frac{\sqrt{2}}{3}$ then $\vec{a} \times \vec{b}$ is a unit vector, if the anlge between $\vec{a}$ and $\vec{b}$ is .

(a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi}{3}$ ( )

(x) रेखा $\frac{x+1}{2} = \frac{2y-2}{4} = \frac{3-z}{3} = \lambda$ के दिकअनुपात है –

(अ) 2, 4, 3 (ब) 2, 2, 3 (स) 2, 4, -3 (द) 2, 2, -3 ( )

Direction ratios of line $\frac{x+1}{2} = \frac{2y-2}{4} = \frac{3-z}{3} = \lambda$ is –

(a) 2, 4, 3 (b) 2, 2, 3 (c) 2, 4, -3 (d) 2, 2, -3 ( )

(xi) रेखाओं $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{5} = \frac{Z+3}{4}$ और $\frac{x-1}{1} = \frac{y+-2}{2} = \frac{Z-3}{-3}$ के मध्य कोण है –

(अ) 45^o (ब) 30^o (स) 60^o (द) 90^o ( )

The angle between the Straight lines $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{5} = \frac{Z+3}{4}$ and $\frac{x-1}{1} = \frac{y+-2}{2} = \frac{Z-3}{-3}$ is -

(a) 45^o (b) 30^o (c) 60^o (d) 90^o ( )

(xii) वृत $x^2 + y^2 = 4$ का क्षेत्रफल है –

(अ) 2π (ब) 16π (स) 4π (द) $\frac{\pi}{4}$ ( )

The area enclosed by the circle $x^2 + y^2 = 4$ is –

(a) 2π (b) 16π (c) 4π (d) $\frac{\pi}{4}$ ( )

(xiii) वक्र $y^2 = 4x$, y अक्ष एवं रेखा $y = 3$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है –

(अ) 2 (ब) $\frac{9}{4}$ (स) $\frac{9}{3}$ (द) $\frac{9}{2}$ ( )

RCSCE राजस्थान स्कूल शिक्षा परिषद
स्कूल शिक्षा विभाग, राजस्थान सरकार

Area of the region bounded by the curve $y^2 = 4x$, y axis and the line $y = 3$ is –

(a) 2 (b) $\frac{9}{4}$ (c) $\frac{9}{3}$ (d) $\frac{9}{2}$ ( )

(xiv) यदि P(A/B) > P (A) तो निम्न में से सत्य है –

(अ) P(B/A) < P (B) (ब) P(A∩B) < P (A).P (B)

(स) P(B/A) > P (B) (द) P(B/A) = P (B) ( )

If then P(A/B) > P (A) which of the following is correct

(a) P(B/A) < P (B) (b) P(A∩B) < P (A).P (B)

(c) P(B/A) > P (B) (d) P(B/A) = P (B) ( )

(xv) यदि P(A) = $\frac{1}{2}$, P (B) = 0 तो P(A/B)–

(अ) 0 (ब) $\frac{1}{2}$ (स) परिभाषित नहीं (द) 1 ( )

If P(A) = $\frac{1}{2}$, P (B) = 0 then P(A/B) is–

(a) 0 (b) $\frac{1}{2}$ (c) not difine (d) 1 ( )

रिक्त स्थान की पूर्ति करों –

(i) $\tan^{-1}\sqrt{3} - \sec^{-1}(-2)$ का मान ..... है।

The value of $\tan^{-1}\sqrt{3} - \sec^{-1}(-2)$ is .....

(ii) $\cos^{-1}\left(\cos\frac{7\pi}{6}\right)$ का मान ..... है।

The value of $\cos^{-1}\left(\cos\frac{7\pi}{6}\right)$ is .....

(iii) $\tan^{-1}\frac{2}{11} + \tan^{-1}\frac{3}{4}$ का मान ..... है।

The value of $\tan^{-1}\frac{2}{11} + \tan^{-1}\frac{3}{4}$ is .....

(iv) यदि $y = \log_a x$ तो $\frac{dy}{dx} =$ .....

if $y = \log_a x$ then $\frac{dy}{dx} =$ .....

(v) यदि $f(x) = -|x + 1| + 3$ तो $f(x)$ .....

If $f(x) = -|x + 1| + 3$ then the maximum value of $f(x)$ is ……

(vi) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + y\,secx = tanx$ का समाकल गुणांक है .....

The integrating factor of equation is $\frac{dy}{dx} + y\,secx = tanx$ ……

(vii) सदिश $\hat{\imath} + \hat{\jmath}$ का सदिश $\hat{\imath} + \hat{\jmath}$ पर प्रक्षेप ..... है।

The Projection of the vector $\hat{\imath} + \hat{\jmath}$ on the vector $\hat{\imath} + \hat{\jmath}$ is ……

अति लघुउत्तरीय प्रश्न –

(i) सारिणक $\begin{vmatrix} x^2 - x + 1 & x - 1 \\ x + 1 & x + 1 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

Find the value of determinate $\begin{vmatrix} x^2 - x + 1 & x - 1 \\ x + 1 & x + 1 \end{vmatrix}$.

(ii) x का मान ज्ञात कीजिए यदि $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 4 \\ 6 & x \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

Find the value of x if $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 4 \\ 6 & x \end{vmatrix}$.

(iii) अंतराल ज्ञात कीजिये जिसमें $f(x) = \cos x$ से प्रदत्त फलन f वर्धमान है, जहां $0 \le x \le 2\pi$

Find the interval in which the function f given by $f(x) = \cos x$, where $0 \le x \le 2\pi$ is increasing function.

(iv) किसी उत्पाद की x इकाईयों के विक्रय से प्राप्त कुल आय $R(x)$ रुपयों में $R(x) = 13x^2 + 26x + 15$ से प्रदत्त है। सीमान्त आय ज्ञात कीजिए जब $x = 7$ है।

The totoal revenue in rupees received from the sale of x units of a product is givne by $R(x) = 13x^2 + 26x + 15$. Find the marginal revenuie when $x = 7$

(v) $\int \frac{1}{x+xlo}\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

Find the value of $\int \frac{1}{x+xlo}\,dx$.

(vi) $\int e^x \left(\tan^{-1} x + \frac{1}{1+x^2}\right) dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

Find the value of $\int e^x \left(\tan^{-1} x + \frac{1}{1+x^2}\right) dx$.

(vii) चार कोटि वाले किसी अवकल समीकरण के व्यापक हल में उपस्थित स्वेच्छ अचरों की संख्या ज्ञात कीजिये।

Find the number of arbitratry constants in the general solutions of a differential equation of fourth order.

(viii) सदिश $\overrightarrow{a} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + \hat{k}$ के अनुदिश मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए।

Find unit *v* ectro in the direction of vector $\overrightarrow{a} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + \hat{k}$

(ix) x तथा y के मान ज्ञात कीजिए ताकि सदिश $2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$ और $x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$ समान हो।

Find the value of x and y so that the vectors $2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$ and $x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$ are equal.

(x) दो सदिशों $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के परिणाम क्रमशः 1 और 2 तथा $\vec{a}.\vec{b} = 1$ इन सदिशों के मध्य कोण ज्ञात कीजिए।

Find the angle between two vector $\vec{a}$ and $\vec{b}$ with magnitudes and respectively and when $\vec{a}.\vec{b} = 1$

खण्ड (ब)

लघु उत्तरीय प्रश्न –

1. जाँच कीजिये कि वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R में R* = {(a,b)}; $a \leq b^2$, द्वारा परिभाषित संबंध R न तो स्वतुल्य, न सममित और न ही संक्रामक है।

   Show that the relation R* in the set R of real numbers defined as R* = {(a,b)}; $a \leq b^2$ R is neither reflexive, nor symmetric nor transitive.

2. यदि $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ हो तो सत्यापित कीजिये कि $AA^{-1} = 1$

   If $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ then verfiy $AA^{-1} = 1$

3. यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ तथा $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ एवं $A^2 = KA - 2I$ हो तो K का मान ज्ञात कीजिये।

   If $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ and $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ then find K, so that $A^2 = KA - I$.

4. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ तो सत्यापित कीजिये कि $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

   If $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ then prove that $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

5. K का मान ज्ञात कीजिये यदि $f(x) = \begin{cases} kx + 1, x \leq 5 \\ 3x - 5, x > 5, x = 5 \end{cases}$ पर सतत हो।

Find the value of K so that, $f(x) = \begin{cases} kx+1, x \leq 5 \\ 3x-5, x > 5, x = 5 \end{cases}$ is continuous at $x = 5$.

6. दर्शाइए कि $f(x) = |\cos x|$ द्वारा परिभाषित फलन एक सतत फलन है।

Show that the function defiend by $f(x) = |\cos x|$ is a continuous function.

7. यदि $y = \sin^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$ तब $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिये।

If $y = \sin^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$ then Find $\frac{dy}{dx}$.

8. दिखाइए कि प्रदत्त फलन f, R पर एक वर्धमान फलन है–

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x, x \in R$

Show that the function given by $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x, x \in R$ is increasing on R.

9. $\int \frac{1}{1+cotx} dx$ का मान ज्ञात कीजिय।

Find the value of $\int \frac{1}{1+cotx} dx$

10. वक्र $y = x^2$ एवं रेखा $y = 4$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।

Find the area of the region bounded by the curve $y = x^2$ and line $y = 4$.

11. सिद्ध कीजिए कि दो सदिशों $\vec{a}$ व $\vec{b}$ के लिए सदेव $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}||\vec{b}|$

Probe that for two vector $\vec{a}$ and $\vec{b}$, $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}||\vec{b}|$

12. यह दिया गयाहै कि दो पासों को एक साथ फेंकने पर प्राप्त संख्याएं भिन्न भिन्न है। दोनों संख्याओं का योग 4 होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

Given that the two numbers appearing on throwing two dice are differen. find the probability of the event "the sum of number on the dice is 4"

खण्ड–स

दीर्घउत्तरीय प्रश्न –

1. $\int \sqrt{x^2 + 4x - 5}\ dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

Evaluate – $\int \sqrt{x^2 + 4x - 5}\ dx$

अथवा

$\int_0^1 \sin^{-1} \frac{2x}{1+x^2}\ dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

Evaluate $\int_0^1 \sin^{-1} \frac{2x}{1+x^2}\ dx$

2. बिन्दु (–2, 3) से गुजरने वाले ऐसे वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके किसी बिन्दु (x, y) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $\frac{2x}{y^2}$ है।

Find the equation of a curve passing through the point (-2, 3) given that the slope of the tangent to the curve at any point (x, y) is $\frac{2x}{y^2}$.

अथ्वा

किसी बैंक में मूलधन की वृद्धि $r\%$ वार्षिक की दर से होती है। यदि 100 रुपये 10 वर्ष में दोगुने हो जाते हैं तो का मान ज्ञात कीजिए।

$(\log_e 2 = 0.6931)$

In a bank, principle increases continuously at the rate $r\%$ per year. Find the value of r if Rs. 100 double itself in 10 year.

$(\log_e 2 = 0.6931)$

3. रेखाओं l_1 व l_2 के बीच में न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए जिनके संदिश समीकरण है –

$\vec{r} = \hat{\imath} + \hat{\jmath} + \lambda(2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k})$ और $\vec{r} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k} + \mu(3\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} + \hat{k})$

Find the shortest distance between the lines l_1 and l_2 whose vector equations are –

$\vec{r} = \hat{\imath} + \hat{\jmath} + \lambda(2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k})$ and $\vec{r} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k} + \mu(3\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} + \hat{k})$

अथवा

दिए गए रेखा युग्म के मध्य कोण ज्ञात कीजिए –

$\vec{r} = 2\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} + \hat{k} + \lambda(3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 6\hat{k})$ और $\vec{r} = 7\hat{\imath} - 6\hat{k} + \mu(\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 2\hat{k})$

Find the angle between the pair of lines given by –

$\vec{r} = 2\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} + \hat{k} + \lambda(3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 6\hat{k})$ and $\vec{r} = 7\hat{\imath} - 6\hat{k} + \mu(\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 2\hat{k})$

4. एक थैले में 4 लाल और 4 काली गेंदें है। एक अन्य थैले में 2 लाल एवं 6 काली गेंदें है। दोनों थैलों में से एक यादृच्छया चुना जाता है एवं गेंद निकाली जाती है जो कि लाल है। इस बात की क्या प्रायिकता है, कि गेंद पहले थैले से निकाली गयी है।

In one bag, there are 4 red and 4 black balls. In another bag, there are 2 red and 6 black balls. One bag is randomly chosen, and a ball is drawn from it, which happens to be red. What is the probability that the ball was drawn from the first bag ?

अथवा

A द्वारा सत्य बोलने की प्रायिकता $\frac{4}{5}$ है। एक सिक्का उछाला जाता है तथा A बताता है कि चित्त प्रदर्शित हुआ है। वास्तब में चित्त प्रदर्शित होने की क्या प्रायिकता है।

The probability of telling the truth by A is $\frac{4}{5}$. A coin is tossed, and it indicates that the face is showing. What is the actual probability of the face being shown ?

खण्ड – द

निबंधात्मक प्रश्न –

1. $\int_0^{\pi} \frac{x\ dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$ का मान ज्ञात कीजिए।

Evluate $\int_0^{\pi} \frac{x\ dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$

अथवा

$\int \sqrt{\cot x} + \sqrt{\tan x}\ dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

Find out $\int \sqrt{\cot x} + \sqrt{\tan x}\ dx$

2. रेखाएं जिनका संदिश समीकरण निम्न हैं के बीच न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

$\vec{r} = (1-t)\hat{\imath} + (t-2)\hat{\jmath} + (3-2t)\hat{k}$ और $\vec{r} = (S+1)\hat{\imath} + (2S-1)\hat{\jmath} - 0(2S+1)\hat{k}$

Find the shortest distance between the lines whose vector equations are -

$\vec{r} = (1-t)\hat{\imath} + (t-2)\hat{\jmath} + (3-2t)\hat{k}$ and $\vec{r} = (S+1)\hat{\imath} + (2S-1)\hat{\jmath} - 0(2S+1)\hat{k}$

अथवा

3. p का मान ज्ञात कीजिए ताकि रेखाएं $\frac{1-x}{3}=\frac{7y-14}{2p}=\frac{z-3}{2}$ और $\frac{7-7x}{3p}=\frac{y-5}{1}=\frac{6-z}{5}$ परस्पर लंबवत हो।

Find the value of p show that lines $\frac{1-x}{3}=\frac{7y-14}{2p}=\frac{z-3}{2}$ and $\frac{7-7x}{3p}=\frac{y-5}{1}=\frac{6-z}{5}$ are at right angle.

4. निम्नलिखित व्यवरोधों के अंतर्गत $z=-3x+y$ का आलेखीय विधिसे न्यूनतमीकरण कीजिए।

$$x+2y\leq 8,\ 3x+2y\leq 12,\ x\geq 0,\ y\geq 0$$

Minimize $z=-3x+y$ subject to constraints x $x+2y\leq 8,\ 3x+2y\leq 12,\ x\geq 0,\ y\geq 0$ by using graphical method.

अथवा

निम्नलिखित व्यवरोधों के अंतर्गत का आलेखीय विधि से अधिकतमीकरण कीजिए।

$$x-y\ \leq\ -1, \qquad -x+y\leq 0,\ x\geq 0,\ y\geq 0$$

Maximize $z=x+y$ subject to constraints $x-y\leq -1,\ -x+y\leq 0,\ 0,\ x\geq 0,\ y\geq 0$ by using graphical method.

टिप्पणी

टिप्पणी

।। सतत् अभ्यास से सुदृढ़ अधिगम की ओर बढ़े ।।

केवल कुछ प्रश्नों के आधार पर पढ़ाई करने से भविष्य उज्ज्वल नहीं होता है। अतः ज्ञान पर ध्यान केन्द्रित करें।

राजस्थान स्कूल शिक्षा परिषद्

द्वितीय एवं तृतीय तल, ब्लॉक-5, डॉ. राधाकृष्णन शिक्षा संकूल परिसर
जवाहर लाल नेहरू मार्ग, जयपुर (राजस्थान)